

原子核の液滴模型の再考

親松和浩、飯田圭、小浦寛之

液滴模型は原子核の束縛エネルギーや大きさを記述するために古くから使われてきた代表的な模型である。近年、元素の起源の謎を解くために重要な中性子過剰原子核の構造に注目が集まっている。本研究では、その鍵となる、陽子中性子数の非対称度に伴う対称エネルギーと原子核表面の性質を液滴模型を用いて検討する。具体的には最新の原子質量測定値を用いて液滴模型の係数の値を最小2乗法で決定する。その結果、非対称度に関して4乗以上の高次の対称エネルギー項が存在すること、曲率項は不要であることが示唆された。また、質量数50以下の原子核のデータだけで係数の値を決めることは難しいが、軽い核の半径は重い核の質量数依存性よりも大きめになることが示唆された。

1 まえおき

電氣的に中性な原子（中性原子）は、正の電荷を帯びた大きさが 10^{-12} cm 程度の原子核とその周りの 10^{-8} cm 程度の範囲に負の電荷を持つ電子が分布したものである。原子核は正の電荷を持つ陽子と電荷を持たない中性子からなる。陽子と中性子は電荷以外の性質がほぼ同じなので、まとめて核子と呼ばれる。核子の質量は電子質量の約2000倍であり、原子質量のほとんどは原子核に集中している。

原子質量は核子と電子の質量の総和にほぼ等しいが、質量 M とエネルギー E の等価性 ($E = Mc^2$) から、核子と電子の相互作用のエネルギーが原子質量に小さな補正を与える。このエネルギーを支配するのは原子核を構成する核子間の相互作用であり、電子に関連した相互作用エネルギーは極めて小さい。したがって、原子質量のずれは原子核の束縛エネルギー B と等しいとしてよく、陽子数 Z 中性子数 N （質量数 $Z + N$ ）をもつ原子の質量 M は次のように近似できる。

$$M = (m_p + m_e)Z + m_n N - B. \quad (1)$$

ただし、 m_p 、 m_n 、 m_e はそれぞれ陽子、中性子、電子の質量である。以下では、この式を使って原子質量 M から束縛エネルギー B を計算する。

本論文では原子核物理学での習慣に従って原子核の束縛エネルギーを $\text{MeV} = 10^6 \text{ eV}$ 単位で表す。SI単位で表すと $1 \text{ MeV} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}$ である。また長さの単位には $\text{fm} = 10^{-15} \text{ m}$ を用いる。核子の大きさと原子核の大きさはそれぞれ 1 fm および 10 fm のオーダーである。

原子核の束縛エネルギーの振る舞いを知ることは、原子核物理や元素の起源を探る宇宙物理的な観点からも、核分裂／核融合エネルギー利用という工学的な観点からも極めて重要であ

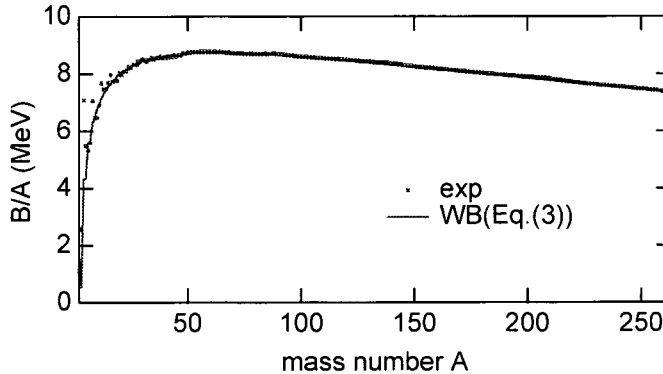


図1 安定原子核の1核子あたりの束縛エネルギー (B/A)。図には測定値 (exp) だけでなく、式 (3) の典型的な係数値を使った液滴模型での計算値 (WB(Eq.(3))) もあわせて示した。両者は軽い核を除いてほとんど重なっている。

る。図1には、安定原子核の1核子あたりの束縛エネルギー B/A を質量数 (核子数) A の関数として表す。核子の質量はおよそ 1000 MeV であるので、核子間相互作用によって生じる束縛エネルギーは原子核質量の1%弱であるといえる。

最も安定な原子核は ^{56}Fe ($A = 56$) である。1核子あたりの束縛エネルギー B/A が大きいほど安定であると考えてよい^{*1}。この振る舞いを活用するのが、核分裂や核融合を利用するエネルギー工学である。例えば質量数 235 のウランの B/A の値は比較的小さいが、核分裂によってより大きな B/A の値をもつ2つの原子核をつくって、余分なエネルギーを取り出すことができる。質量数が 56 よりも小さい原子核の場合は、核融合によって質量数 56 に近いより安定な原子核をつくることによってエネルギーを取り出すことができる。

原子質量に関連する最近の研究については文献 [1] に紹介されているが、 B の平均的振る舞いは液滴模型 (Liquid Drop Model : LDM) で良く記述できることが古くから知られている (図1)。著者等は、原子核の性質を実験的に詳細に検討することによって、未知の不安定原子核、超新星物質、中性子星物質のマクロな性質の予測の信頼性を高め、元素の起源という根源的な謎に迫りたいと考えている。こうした研究には液滴模型を超えたより詳細な理論的枠組みが必要であるが、自由度が大きくなるため何が支配的なパラメーターであるかが分かりにくくなるという欠点がある。

そこで本研究では、最新の原子質量測定値を用いて、液滴模型で原子核のどのような性質を精度よく決定できるかを検討する。また、原子核の束縛エネルギーには密度分布の効果や量子力学的な効果も含まれるため、特に質量数の比較的小さい原子核で液滴模型がどの程度うまくいくかについても検討したい。

^{*1} 厳密に言えば1核子あたりの質量エネルギー M/A が小さいものが安定である。核子質量のわずかな違いから1核子あたりの束縛エネルギー B/A が最大になるのは ^{62}Ni ($A = 62$) のときで、 ^{56}Fe ($A = 56$) から少しずれる。しかし両者の M/A の差は核子あたり 0.006 MeV と極めてわずかである。

2 原子核の束縛エネルギーと半径

液滴模型では原子核をはっきりした表面を持つ球形であるとし、その内部の核子分布密度は原子核の種類によらず一定であると仮定する。そのため質量数（核子数） A の原子核の半径は $A^{1/3}$ に、表面積は $A^{2/3}$ に、体積は A にそれぞれ比例する。

液滴模型の代表例は Weizsäcker-Bethe（ワイツゼッカー・ベエテ）タイプの公式 [2, 3] であり、元素番号（陽子数） Z 、質量数 A の原子核の束縛エネルギー $B(Z, A)$ が

$$-B(Z, A) = a_{vol}A + a_{surf}A^{2/3} + a_{sym}\left(\frac{N-Z}{A}\right)^2 A + a_{Coul}Z^2/A^{1/3} \quad (2)$$

で与えられる。右辺第 1 項は原子核の体積のみに比例する体積エネルギー、第 2 項は表面積に比例する表面エネルギー、第 3 項は陽子中性子の非対称度 $(N-Z)/A$ に依存し体積に比例する（2次の）対称エネルギー、第 4 項は陽子間に生じるクーロンエネルギー（静電エネルギー）である。極限物質研究では対称エネルギーに関するより詳細な情報が必要になる。

この公式 (2) の係数 a_{vol} , a_{surf} , a_{sym} , a_{Coul} の値は、原子核の束縛エネルギー $B(Z, A)$ の測定値を再現するように決定される。測定値は主にベータ崩壊に対して比較的安定な原子核に限られる。後に議論するように係数の決め方には若干の不定性があるが典型的な値は、

$$a_{vol} = -16(\text{MeV}), a_{surf} = 17(\text{MeV}), a_{sym} = 23(\text{MeV}), a_{Coul} = 0.7(\text{MeV}) \quad (3)$$

である。図 1 に示すようにこれらの係数の値を使えば束縛エネルギーの質量性依存性を平均的に再現できる。

またこの模型は原子核の半径や密度についての情報も与える。原子核半径を

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (4)$$

と書いて、クーロンエネルギーを計算すると係数 a_{Coul} を用いて

$$r_0 = 0.9/a_{Coul}(\text{fm}) \quad (5)$$

となる。典型的な値 (式 (3)) を用いると $r_0 = 1.2 \text{ fm}$ になる。これから原子核内の核子数密度

$$\rho_0 = 3/(4\pi r_0^3) \quad (6)$$

を計算することができ、 0.13 fm^{-3} 程度の値が得られる。原子核表面は厚みを持つため、経験的に知られた原子核の中心部分の密度 ($\rho_0 \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$ 。しばしば原子核密度と呼ばれる) はこれよりもやや大きい。

以上のように液滴模型は質量や大きさといった原子核のマクロな性質に関してかなりの予測能力を持っているといえる。

3 液滴模型の具体形

本研究では、原子核表面での陽子中性子相互作用と、比較的軽い核 ($A < 50$) での原子核表面の特徴を液滴模型で検討する。具体的には、Weizsäcker-Bethe タイプの公式 (2) を拡張して原子核の束縛エネルギーを

$$\begin{aligned}
 -B(Z, A) = & a_{vol}A + a_{surf}A^{2/3} + a_{curv}A^{1/3} \\
 & + a_{sym} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 A + a_{surfsym} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 A^{2/3} \\
 & + a_{sym2} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^4 A + a_{Coul}Z^2/A^{1/3}
 \end{aligned} \quad (7)$$

と書く [4]。右辺の最初の 6 項が核子間力によって生じるエネルギーである。各項の効果は A については冪乗が小さくなるにつれ、 $(\frac{N-Z}{A})$ については冪乗が大きくなるにつれてより高次の効果となり影響が小さくなる。式 (7) で新たに加えた項は、原子核表面での陽子中性子相互作用を取り入れるための表面エネルギー項 $a_{surfsym}(\frac{N-Z}{A})^2 A^{2/3}$ と、軽い (質量数の小さい) 原子核での原子核表面の特徴を取り入れるための曲率項 $a_{curv}A^{1/3}$ である。また、陽子中性子相互作用のより高次の影響を取り入れるため、高次の対称エネルギー項 $a_{sym2}(\frac{N-Z}{A})^4 A$ も加えた。

4 最新の質量測定値から引き出される原子核の性質

最新の質量測定値 [5] を用いて式 (7) の係数の値を最小 2 乗法によって決定する。その結果を表 1～4 に示す。比較のために、安定原子核の質量測定値で決めた Weizsäcker-Bethe タイプの公式 (WBY64)[6] の係数の値も示した。また、これらの表には係数の値だけでなく、液滴模型計算値と測定値のずれの標準偏差も合わせて示した。

最小 2 乗法によって求めた係数の値はおおむね典型的な値 (式 (3)) や安定原子核で決めた値 (WBY64) に近いが、いくつかの組では著しい違いがある。そこで、式 (7) の各項の物理的な意味を系統的に吟味するためにいくつかの係数の値を 0 とした場合も考え、Weizsäcker-Bethe タイプの公式 (WB) および LDM1～4 の 5 種類の係数の組を求めた。また、軽い核での振る舞いの吟味のために、係数を決定する際に使う原子核の種類 (核種) に制限を付けて係数の値を決定した。表 1 は陽子数 2 以上質量数 4 以上の 2219 核種、表 2 は陽子数 8 以上質量数 16 以上の 2149 核種、表 3 は質量数 50 以上の 1922 核種のデータを用いて係数の値を決定したものである。表 1～3 では、重い核種のデータに絞っていったときの係数値の変化を見ることができる。表 4 は軽い核種 (陽子数 2 以上質量数 4 以上 50 未満の 297 核種) のデータだけで係数を決めるとどうなるかを調べるためのものである。

残念ながら軽い核での効果を期待した曲率項については有用な情報は得られなかった。表 1 だけでなく軽い核のデータだけを用いた表 4 でも、曲率項の有る無し (LDM1 と LDM4、及び LDM2 と LDM3) の場合の比較から、曲率項が実験データの再現性の改善に効いていない

表1 陽子数2以上質量数4以上(中性子数2以上)の2219核種の質量測定値を用いて最小2乗法で決定した係数の値(MeV)。rms devは2219核種の質量計算値と測定値のずれの標準偏差(MeV)を表す。WBY64は安定原子核で決めた係数値[6]である。

coefficient (MeV)	WBY64	WB	LDM1	LDM2	LDM3	LDM4
a_{vol}	-15.5391	-15.3963	-15.947	-15.6163	-15.3963	-15.7704
a_{surf}	16.9666	16.5262	18.9145	17.4901	16.1916	17.8954
a_{sym}	22.7739	22.6091	28.5573	27.165	26.7438	28.1868
a_{Coul}	0.703893	0.692754	0.715587	0.698424	0.689653	0.708381
$a_{surfsym}$	0	0	-19.1068	-23.0101	-22.4885	-18.8895
a_{curv}	0	0	-1.68183	0	2.18191	0
a_{sym2}	0	0	-24.3053	0	0	-23.2628
rms dev	3.49	3.45	2.83	2.99	2.98	2.84

表2 陽子数8以上質量数16以上(中性子数8以上)の2149核種の質量測定値を用いて最小2乗法で決定した係数の値(MeV)。rms devは2149核種の質量計算値と測定値のずれの標準偏差(MeV)を表す。WBY64は安定原子核で決めた係数値[6]である。

coefficient (MeV)	WBY64	WB	LDM1	LDM2	LDM3	LDM4
a_{vol}	-15.5391	-15.6137	-15.2726	-15.6732	-14.6141	-15.83
a_{surf}	16.9666	17.2087	14.7975	17.5986	11.1116	18.0723
a_{sym}	22.7739	23.1474	26.5159	26.2724	23.8307	28.2683
a_{Coul}	0.703893	0.707071	0.691203	0.704458	0.665179	0.712516
$a_{surfsym}$	0	0	-15.2631	-17.1011	-11.8647	-18.076
a_{curv}	0	0	5.44726	0	11.2562	0
a_{sym2}	0	0	-17.6912	0	0	-24.7765
rms dev	3.13	3.07	2.78	2.89	2.81	2.79

ことが分かる。表2のLDM1とLDM4の比較でも同様である。さらに曲率項を入れた表2のLDM3と表3のLDM1とLDM3ではクーロン項の係数と表面エネルギー項の係数の一方または両方が著しくずれて原子核の半径に関する記述を損なう結果となっている。これは曲率という余計な自由度を模型に持ち込んだためだと考えられる。

表1~3で係数の値に物理的意味のある結果を与えるのはWB、LDM2、LDM4であり、この順に対称エネルギーに関する自由度が増える。対称エネルギーの係数 a_{sym} の値は、WBでは22-23 (MeV)、表面对称エネルギー項を加えたLDM2では26-27 (MeV)、さらに高次の項を加えたLDM4では28-29 (MeV)と自由度の増加とともに値が少しずつ大きくなり一様核物質での経験的な値[7]に近づく。表面エネルギーの係数 a_{surf} もWB、LDM2、LDM4の順にわずかずつ増加する。 $a_{surfsym}$ と a_{sym2} の値は、最小2乗近似の入力データによって大きく

表 3 質量数 50 以上の 1922 核種の質量測定値を用いて最小 2 乗法で決定した係数の値 (MeV)。rms dev は 1922 核種の質量計算値と測定値のずれの標準偏差 (MeV) を表す。WBY64 は安定原子核で決めた係数値 [6] である。

coefficient (MeV)	WBY64	WB	LDM1	LDM2	LDM3	LDM4
a_{vol}	-15.5391	-15.6989	-13.2156	-15.6503	-13.6657	-15.8905
a_{surf}	16.9666	17.4735	1.21078	17.5108	4.03233	18.3069
a_{sym}	22.7739	23.3899	19.4139	26.1284	21.2594	29.3539
a_{Coul}	0.703893	0.712589	0.627171	0.70341	0.642157	0.714721
$a_{surfsym}$	0	0	1.27155	-16.5568	-2.92254	-22.1262
a_{curv}	0	0	30.9665	0	25.9628	0
a_{sym2}	0	0	8.22421	0	0	-29.2431
rms dev	3.12	3.04	2.77	2.93	2.77	2.83

表 4 陽子数 2 以上質量数 4 以上 50 未満 (中性子数 2 以上) の 297 核種の質量測定値を用いて最小 2 乗法で決定した係数の値 (MeV)。rms dev は 297 核種の質量計算値と測定値のずれの標準偏差 (MeV) を表す。WBY64 は安定原子核で決めた係数値 [6] である。

coefficient (MeV)	WBY64	WB	LDM1	LDM2	LDM3	LDM4
a_{vol}	-15.5391	-14.1159	-16.0374	-14.959	-15.8517	-14.8944
a_{surf}	16.9666	14.3512	22.723	16.3135	21.6113	15.9387
a_{sym}	22.7739	16.9635	23.8762	28.4612	27.6502	25.3348
a_{Coul}	0.703893	0.50089	0.611159	0.588889	0.595452	0.601084
$a_{surfsym}$	0	0	-8.92712	-31.1066	-28.2633	-14.7528
a_{curv}	0	0	-10.1323	0	-7.85504	0
a_{sym2}	0	0	-20.5385	0	0	-18.1442
rms dev	5.27	2.96	2.18	2.44	2.39	2.29

変わるような不自然さはなく、それぞれ、-23~-17 (MeV)、-29~-23 (MeV) と表 1~3 で大きな差はない。これらのことと LDM2 に高次の項を加えた LDM4 で測定値の再現性が有為に改善することから、液滴模型の枠組みでは表面对称エネルギー項だけでなく高次の対称エネルギー項 $a_{sym2}(\frac{N-Z}{A})^4 A$ が存在すると結論してよいだろう*2。

質量数が 50 未満の軽い核だけで決めた表 4 の係数では、質量計算値が重い核で測定値から大きくずれる。図 2 には LDM2 の場合を示すが WB、LDM4 も同様の傾向を示す。係数値は典型的な値 (3) からかなりずれるが、特に目を引くのはクーロン項の係数 a_{Coul} が WB、LDM1-4 のどの場合にも著しく小さいことであり、重い核での質量計算値のずれに大きく寄与

*2 液滴模型では原子核の非対称度によらず内部の密度が一定という条件を課しているため、必ずしも一様核物質の対称エネルギーに 4 次の非対称項が存在することを意味しない。

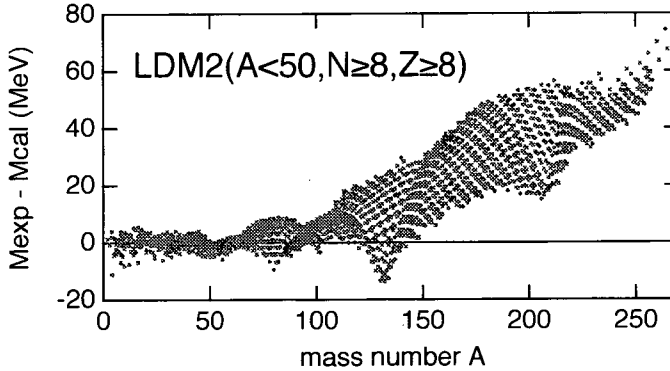


図2 表4のLDM2を用いた質量計算値 (Mcal) と測定値 (Mexp) のずれ。

する。また、 a_{Coul} が小さいことは、軽い核の半径が重い核での系統式 $R = 1.2A^{1/3}$ (fm) (式(4)) よりも有為が大きくなることを示唆する。この結果は質量測定値から得られたものであるが、陽子弾性散乱の解析からも半径に関する同様の傾向が得られており [8]、軽い原子核の構造を特徴付ける重要な性質であると言えそうである。

最後に表1~3で得られた液滴模型による原子質量計算値を吟味したい。まず、安定原子核について検討する。図3には各質量数 A について質量 M が最小になる (N, Z) の実験値をプロットした。一方 $a_{sym2} = 0$ の液滴模型では質量数 A のときの質量最小を与える非対称度は、

$$\frac{N - Z}{A} = \frac{a_{Coul}A^{2/3} + m_n - m_p - m_e}{4(a_{sym} + a_{surfsym}/A^{1/3}) + a_{Coul}A^{2/3}} \quad (8)$$

で与えられ、これから陽子数 Z と中性子数 N を計算することができる。図3には表2のLDM2と、2つのワイツゼッカー・ベータ公式 (式(3)の典型的な係数値 (WB(Eq.(3))) を使ったものと、安定核で決めた係数値 (WB64) を使ったもの) で計算した (N, Z) も示した。3つの計算値は、重い核 ($A > 220$) で実験値とややずれるものの、この図で見るとほぼ一致している。図1,3から B/A や安定な原子核の (N, Z) を結んだ安定線の大局的な振る舞いに関しては、典型的な係数値 (3) の Weizsäcker-Bethe 公式で充分よく再現できることが分かる。なお、表2のWB, WB, LDM2で計算した最も安定な原子核は ^{60}Co ($Z = 27, A = 60$)、表2のLDM4では ^{62}Ni ($Z = 27, A = 62$) であった。

陽子数中性子数が8以上の原子核で決めた表2のWB、LDM2、LDM4を標準的な模型として、質量計算値と測定値のずれを図4に示す。図1の B/A と比べるとずれがかなり大きく見えるが、核子あたりの量ではないので一致度はむしろ図4の方が優れている、これらの図で下方に飛び出した部分は量子力学的効果 (殻効果) によるものである。測定値とのずれはWB、LDM2、LDM4の順に小さくなるが比較的軽い原子核での改善が顕著である。軽い原子核には非対称度の大きな原子核が多く含まれるため対称エネルギーに関する模型の精緻化が効果的に働いているようである。ただし、 $A > 220$ の重い核ではLDM4の計算値がややずれる副作用が見える。

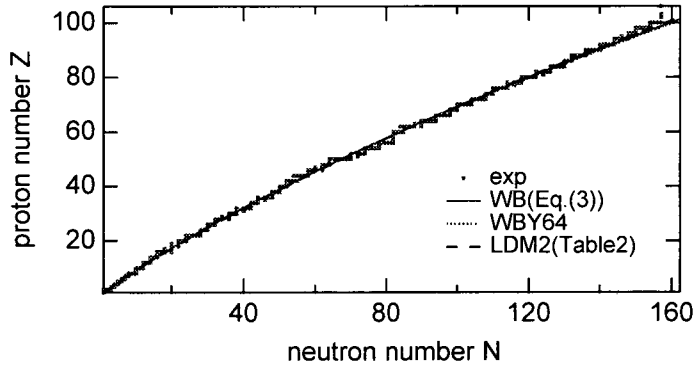


図3 安定原子核の中子数 N と陽子数 $Z(\text{exp})$ 。図には式 (3) の係数値 (WB(Eq.(3))), 安定核で決めた係数値 (WBY64) および、表2のLDM2で計算したもの (LDM2(Table2)) もあわせて示した。3つの計算値はほとんど区別できない。

陽子数中性子数が2以上の原子核で決めた表1のWB, LDM2, LDM4を用いた質量計算値は表2のものよりも測定値との一致度が良いがその差はわずかである。表1の係数決定には ^4He など液滴で記述できそうにない原子核も含むため表2のものを標準としたが、液滴模型はかなり軽い核まで良い計算値を与える。

図5には質量数が50以上の原子核で決めた表3のWB, LDM2, LDM4の計算値と測定値のずれを示すが、これは図4とほとんど変わらない。質量測定値のほとんどが質量数50以上のものであるため、液滴模型の性質は質量数が50以上の原子核でほとんど決められているようである。

5 結び

本研究では陽子中性子数の非対称度に伴う対称エネルギーと原子核表面の性質を液滴模型を用いて検討した。液滴模型の係数の値は、最新の原子質量の測定値を再現するように最小2乗法で決定した。その結果、対称エネルギーに関しては非対称度に関して4乗の高次の項が存在すること、曲率項は不要であることが示唆された。また、比較的軽い核 ($A < 50$) の質量データだけで係数の値を決めることは難しいが、軽い核の半径は重い核の質量数依存性で計算したものよりも有為に大きくなることが示唆された。

本研究の一部は平成19年度愛知淑徳大学特定課題研究助成「不安定原子核ビーム実験で探る超高密度物質の構造」の援助を受けて行なわれた。

参考文献

- [1] 小浦寛之、橋孝博、日本物理学会誌 **60** (2005) 717.
- [2] C. F. von Weizsäcker, Zeitschrift für Physik **96** (1935) 431.

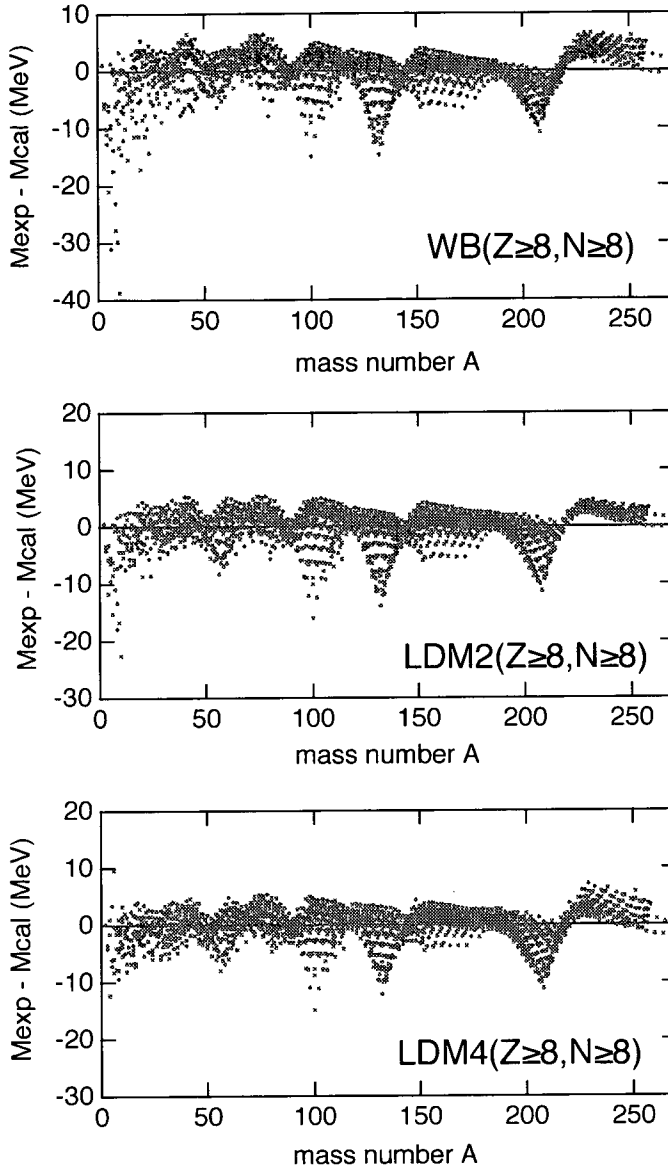


図4 表2のWB、LDM2、LDM4を用いた質量計算値 (Mcal) と測定値 (M_{exp}) のずれ。

- [3] H. A. Bethe and R. F. Bacher, Review of Modern Physics **8** (1936) 82.
- [4] P.-G. Reinhard, M. Bender, W. Nazarewicz, and T. Vertse, Physical Review C **73** (2006) 014309.
- [5] G. Audi, A. H. Wapstra and C. Thibault, Nuclear Physics A **729** (2003) 337.
- [6] M. Yamada, Progress of Theoretical Physics **32** (1964) 512.
- [7] K. Oyamatsu and K. Iida, Progress of Theoretical Physics **109**, (2003) 631.

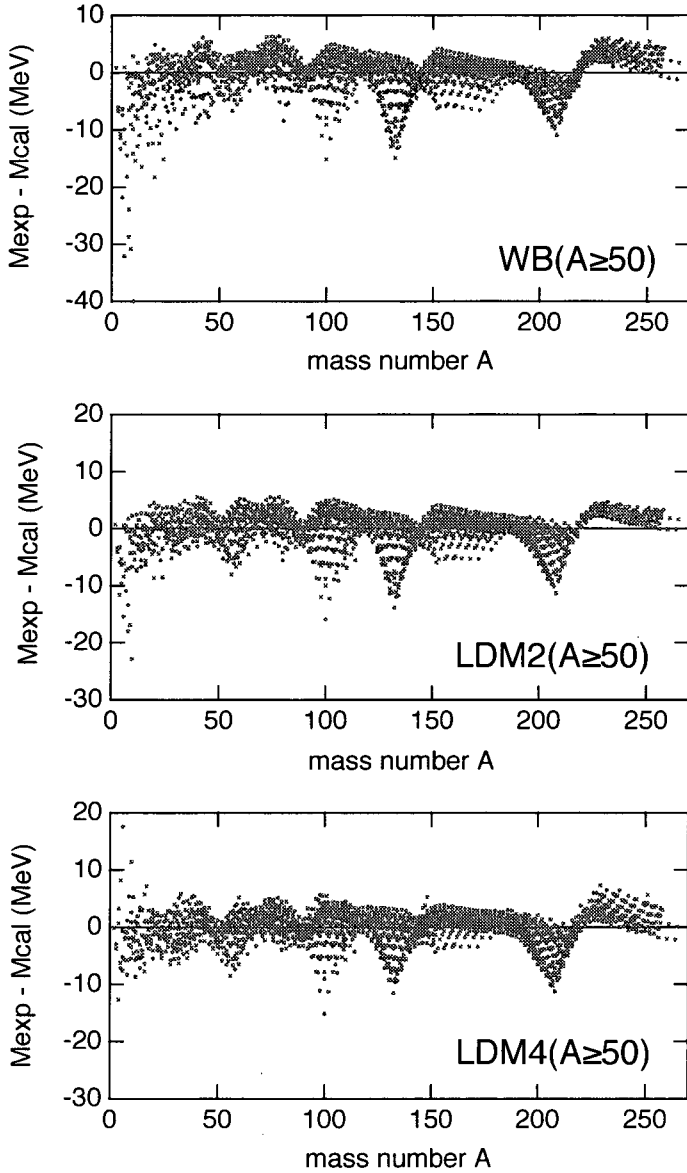


図5 表3のWB、LDM2、LDM4を用いた質量計算値(Mcal)と測定値(Mexp)のずれ。

[8] A. Kohama, K. Iida, and K. Oyamatsu, Physical Review C **69** (2004) 064316.