

# 原子核の表面对称エネルギーの検討

親松 和浩

半古典的模型では原子核の表面对称エネルギーが、密度変化に伴うバルクな対称エネルギーの変化と密度微分項の両方から生じる。本研究では、陽子中性子の密度に非対称な密度微分項がどの程度の寄与を与えるかを吟味する。その結果、この項のあるなしは、安定原子核のマクロな性質の再現性にはほとんど影響を与えず、核物質の経験的な状態方程式にもわずかな影響しか与えないことが分かった。また、中性子過剰原子核に対してもあまり影響を与えないことが示唆された。

## 1 まえおき

原子核は正の電荷を持つ陽子と電荷を持たない中性子からなる量子力学的多体系であるが、原子核の大きさや束縛エネルギーといったマクロな性質は、よい近似で、半古典的なマクロ原子核模型で記述できる。本研究では半古典的模型として Thomas-Fermi (トーマス・フェルミ) 理論を用いることにする。殻エネルギーと呼ばれる量子力学的効果はせいぜい 10 MeV 程度であり、原子核の束縛エネルギー ( $8 \times$  質量数 (MeV) 程度) に比べて充分小さい。

地球上に自然に存在する原子核は、陽子数と中性子数があまり変わらない  $\beta$  崩壊に対して安定な原子核とその近傍の数 100 種程度の原子核に限られる。一方で、陽子数と中性子数の差が大きな中性子過剰な原子核では、安定原子核とは異なるさまざまな興味深い構造が期待され、元素の起源や宇宙の化学進化の鍵を握ると言う意味でも興味が尽きない。(中性子数-陽子数)/質量数を非対称度という。近年の RI ビーム技術の発展によって、非対称度の大きな中性子過剰原子核の実験的研究の道が開かれつつある。

中性子過剰原子核の性質を支配するのは、非対称度によって生じる対称エネルギーである。液滴模型で考えると、対称エネルギーは体積対称エネルギーと表面对称エネルギーに分けられる[1]。特に、中性子過剰原子核の表面では、中性子分布の方が陽子分布よりも外に広がる中性子スキンや中性子ハローと呼ばれる現象が知られており、表面对称エネルギーの振る舞いが重要となる。半古典的 Thomas-Fermi 理論での表面对称エネルギーはバルクな対称エネルギーと表面での核子密度変化に伴う密度勾配項の両方から生じ、 $\beta$  安定核ではそれらの寄与は等しい[8]。密度勾配項に関しては、陽子中性子の密度の和に依存する対称項と陽子中性子の密度差に依存する非対称項の2つがある。これまで、非対称な密度勾配項の影響は十分小さいとして無視してきた。[2, 8, 12]

本研究では、安定原子核のマクロな性質を再現する半古典的な Thomas-Fermi 理論で、非対称な密度勾配項がどの程度のエネルギーを与えるか、またこの項のあるなしでバルクな対称エネルギーがどの程度違ってくるかを検討する。具体的には非対称密度勾配項を最大にとったときの影響を調べることにする。

## 2 原子核の Thomas-Fermi 理論

原子質量は核子と電子の質量の総和にほぼ等しいが、質量  $M$  とエネルギー  $E$  の等価性 ( $E=Mc^2$ ) から、核子と電子の相互作用のエネルギーが原子質量に小さな補正を与える。本研究では、量子力学的なエネルギーは無視して、陽子数  $Z$  中性子数  $N$  (質量数  $A=Z+N$ ) をもつ中性原子の質量を

$$M(Z, N) = (m_p + m_e)Z + m_n N + E_{TF}(Z, N). \quad (1)$$

と近似する。ただし、 $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_e$  はそれぞれ陽子、中性子、電子の質量である。式(1)の  $E_{TF}(Z, N)$  が  $Z$  と  $N$  の滑らかな関数で表される半古典的なエネルギーである。

相互作用エネルギーの大部分は、密度が一様な核物質 (陽子と中性子だけからなる仮想的な物質) のエネルギー密度で表すことができる。中性子密度  $n_n$ 、陽子密度  $n_p$ 、全核子密度が  $n = n_n + n_p$  である一様核物質のエネルギー密度を  $\epsilon(n_n, n_p)$  と書く。原子核は一様核物質と異なるので、密度の非一様性によって生じるエネルギーが加わる。本研究では、半古典的エネルギーを以下の式で近似する。

$$E_{TF}(Z, N) = \int d^3r \epsilon(n_n(\mathbf{r}), n_p(\mathbf{r})) + \int d^3r F_0 [|\nabla n(\mathbf{r})|^2 - \beta |\nabla(n_n(\mathbf{r}) - n_p(\mathbf{r}))|^2] + \frac{e^2}{2} \int d^3r \int d^3r' \frac{n_p(\mathbf{r})n_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2)$$

ここで、 $e$  は素電荷、 $n_n(\mathbf{r})$ ,  $n_p(\mathbf{r})$ ,  $n(\mathbf{r})$  は、それぞれ、点  $\mathbf{r}$  における中性子、陽子、全核子の密度である。式(2)の第1項は一様核物質の状態方程式  $\epsilon(n_n, n_p)$  で表される体積 (バルク) 項、第2項は密度の非一様性によって生じる密度勾配項、第3項は電荷密度の非一様性によって生じるクーロンエネルギー項である。密度勾配項は核力の到達距離が有限である効果を反映したもので、 $\beta$  崩壊に対して安定な原子核の場合、表面エネルギーの半分を与える[8]。

一様核物質のエネルギー密度  $\epsilon(n_n, n_p)$  は、運動エネルギー密度  $t(n_n, n_p)$  とポテンシャルエネルギー密度  $v(n_n, n_p)$  の和として表す。

$$\epsilon(n_n, n_p) = t(n_n, n_p) + v(n_n, n_p). \quad (3)$$

運動エネルギー密度  $t(n_n, n_p)$  は自由な Fermi (フェルミ) 粒子の運動エネルギー密度とする。

$$t(n_n, n_p) = \frac{3}{5}(3\pi^2)^{2/3} \left( \frac{\hbar^2}{2m_n} n_n^{5/3} + \frac{\hbar^2}{2m_p} n_p^{5/3} \right). \quad (4)$$

一様核物質のポテンシャルエネルギー密度  $v(n_n, n_p)$  は、核力の荷電対称性を利用して、対称核物質のポテンシャルエネルギー密度  $v_s(n)$  と中性子物質のポテンシャルエネルギー密度  $v_n(n)$  を用いて次のように近似する。

$$v(n_n, n_p) = [1 - (1 - 2x)^2] v_s(n) + (1 - 2x)^2 v_n(n). \quad (5)$$

ここで、 $x = n_p / (n_n + n_p)$  は陽子の混在度である。式(5)は陽子混在度依存性 (非対称度依存性) に関する多体計算結果を良く再現する近似である[4]。

対称核物質と中性子物質のポテンシャルエネルギー密度には以下の関数形[5]を用いる。

$$v_s(n) = a_1 n^2 + \frac{a_2 n^3}{1 + a_3 n}, \quad v_n(n) = b_1 n^2 + \frac{b_2 n^3}{1 + b_3 n} \quad (6)$$

結局、式(2)の $E_{TF}$ には8つの相互作用パラメータが含まれる。それらは、一様核物質のポテンシャルエネルギー密度の $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ と、原子核表面で効く核力の到達距離の効果を表す $F_0$ およびその非対称度依存性を与える $\beta$ である。

半古典的模型での核子密度分布は古典的展開点(核子のフェルミエネルギーとポテンシャルが等しくなる点)より外側の核子密度はゼロになる。そこで本研究では、計算の簡単化のため、核子分布に関するEuler方程式を解くことはせずに、陽子中性子の密度分布をパラメータで表し、それらのパラメータに関して式(2)のエネルギー( $E_{TF}$ )の最適化をする。原子核の核子密度分布に関しては、以下の次の2つの性質が知られている。

- 安定原子核では陽子と中性子の密度分布はほぼ比例し、原子核表面で3 fm程度の広がりを持つ
- 中性子過剰不安定原子核では中性子分布半径の方が陽子分布半径よりも大きい

そのため、陽子と中性子の分布を独立にして、それぞれの分布が半径と表面の厚さを2つのパラメータを持つことが望ましい。本研究では、球対称性を仮定し、次の関数で近似する。

$$n_i(r) = \begin{cases} n_i^{\text{in}} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_i} \right)^{t_i} \right]^3, & r < R_i, \\ 0, & r \geq R_i. \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 $i=n, p$ は陽子( $p$ )と中性子( $n$ )を区別する添字で、 $r$ は中心からの距離、 $n_i^{\text{in}}$ は中心密度、 $R_i$ は分布半径、 $t_i$ は表面の厚みを与えるパラメータである。この表式はArponenが中性子星物質の研究で用いたもの[13]を著者が改良したもので、密度分布が有限領域に限られるため計算が容易であること、Coulombエネルギーを解析的に計算できることが主要な利点である。本研究ではこれらの密度分布パラメータの値を変化させて式(2)の $E_{TF}$ の値を最小化する。

### 3 EOS パラメータの決定法

安定原子核の質量と半径の経験値を再現できる数百種類の模型を系統的に作成した。具体的には、いくつかの質量数 $A$ に対して、平滑化した $\beta$ 安定線上での陽子数 $Z$ (平滑化のため整数でない)と質量超過 $M_{ex}$ 及び荷電分布の平均自乗半径の平方根 $r$ の経験値を同程度に再現するように、8個の相互作用パラメータ $a_1-a_2, b_1-b_2, F_0, \beta$ の値を決定する。具体的には、最適化の程度を与える

$$\Delta = \sum_{i=1}^9 [(Z_i - Z_i^{(0)})/d_Z]^2 + \sum_{i=1}^9 [(M_i - M_i^{(0)})/d_M]^2 + \sum_{i=1}^7 [(r_i - r_i^{(0)})/d_r]^2 \quad (8)$$

を最小化するように状態方程式の 8 個のパラメータの値を決める。 $A^{(0)}, Z^{(0)}, M_{ex}^{(0)}, r^{(0)}$  の経験値を表 1 に示す。また、 $d_Z, d_M, d_r$  はそれぞれの許容量の目安を与える量で、 $d_Z=0.1, d_M=1$  (MeV),  $d_r=0.01$ (fm) とする。

表 1 平滑化した  $\beta$  安定線上の原子核の経験値。 $A_i^{(0)}, Z_i^{(0)}, M_{ex}^{(0)}, r_i^{(0)}$  は、それぞれ、質量数、陽子数、質量超過(MeV)、荷電分布の平均自乗半径の平方根(fm) である。平滑化のため陽子数は整数とは限らない。また、質量数 200 以上の半径のデータは利用しないため空欄としてある。

$A_i^{(0)}$	$Z_i^{(0)}$	$M_{ex}^{(0)}$ (MeV)	$r_i^{(0)}$ (fm)
25	12.41	-13.10	3.029
47	21.855	-46.17	3.567
71	31.695	-72.38	3.997
105	45.085	-89.69	4.487
137	57.154	-84.89	4.874
169	68.854	-61.18	5.206
199	79.61	-23.12	5.466
225	89.18	21.22	
245	96.39	61.21	

以下の 4 つの量は安定原子核の質量と半径からは定まらないため次のように扱う。

- $K_0$ : アイソスカラーモノポール巨大共鳴等で見積もった対称核物質の非圧縮率  $K_0$  の不確かさを  $180 \leq K_0 \leq 360$  MeV と見積もる。
- $y$ : 現象論的な 2 つの極端な状態方程式 (非相対論的 Skyrme Hartree-Fock 理論の SIII [9]、相対論的平均場理論の TM1[10]) を使って飽和曲線の傾き  $y = -K_0 S_0 / (3n_0 L)$  の不確かさを  $-1800 \leq y \leq -200$  MeV と見積もる [8]。
- $\beta$ : 中性子物質の極限を考えると、密度勾配の非対称項の強さは  $0 \leq \beta \leq 1$  である。
- $b_3$ : 中性子星物質の高密度での硬さに関係する。文献[2] では、第一原理的な計算[6] に合うように  $b_3 = 1.58632$  (fm<sup>3</sup>) とし、以降の研究でも用いてきた [3, 8, 12]。文献[11] では  $b_3$  も含めた最適化を行った (ただし  $\beta = 0$ ) が、 $b_3 = 1.6$  (fm<sup>3</sup>) からほとんどずれなかった。そこで本研究でも  $b_3 = 1.58632$  (fm<sup>3</sup>) とする。

具体的には以下の場合を調べる。

- $K_0 = 180, 190, 200, \dots, 360$  (MeV)
- $-y = 200, 220, 250, 300, 350, 400, 500, 600, 800, 1000, 1200, 1800$  (MeV fm<sup>3</sup>)
- $\beta = 0, 1$
- $b_3 = 1.58632$  (fm<sup>3</sup>)

## 4 結果と議論

非対称勾配項の2つの極端な場合( $\beta = 0, 1$ )の結果を示し、対称エネルギーへの効果を中心に吟味する。

### 4.1 $\beta = 0$ の場合

本報告では文献[8]の場合を基準として考える。 $\beta \neq 0$ の場合には、文献[8]では重要でなかったことも考慮が必要となる可能性がある。そこで改めて、図 1, 2 に結果を示し吟味する。

図 1 には原子核密度 $n_0$ における対称エネルギー $S_0$ とその密度微分 $L$ [8]及び最適化の程度 $\Delta$ を示す。図 1 上段は $(K_0, L)$ の許容領域を示す。これは $(K_0, y)$ の不確かさを反映したものである。飽和曲線の傾き $y$ の値が等しい $(K_0, L)$ を線で結んである。 $y$ が大きいほど $L$ の値と結んだ線の傾きが大きい。また、この領域には2つの両極端の現象論的状态方程式(非相対論的 Skyrme Hartree-Fock 理論の SIII[9]と相対論的平均場理論の TM1[10])も含まれ、この図に示す領域は経験的に許される現象論的状态方程式をよくカバーしていることが分かる。

図 1 中段には $(L, S_0)$ を示す。 $S_0$ と $L$ の間には強い相関を見ることができる。この図の相関は安定核の原子核質量と半径から経験的に得られたものであるが、現象論的核子間力を用いた Hartree-Fock 計算でも同様な相関が得られており[14]、対称エネルギーに関する基本的な性質であると感じられる。

図 1 下段には最適化の程度を表す $\Delta$ を示す。 $\Delta$ の値には数値計算誤差に伴う散らばりがやや見られる。値はそれほど変わらないものの、 $L$ に対して増加する傾向が見られる。ただし、最適化の程度はどの場合もそれほど変わらない。

図 2 には、表面勾配項の係数 $F_0$ 、対称核物質の飽和密度 $n_0$ 及び飽和エネルギー $w_0$ の $K_0$ 依存性を示す。図 2 上段の $F_0$ には10%程度の不確かさがあり、 $K_0$ に対して減少、 $L$ に対して増加の傾向がある。図 2 中段の飽和密度 $n_0$ にも10%程度の不確かさがあり $K_0$ に対して減少するが、 $L$ にはそれほど感度を持たない。これらに比べると図 2 下段の $w_0$ の不確かさは1%程度で非常に小さい。

### 4.2 $\beta = 1$ の場合

非対称度がもっとも大きい中性子物質の場合を考えると、 $0 \leq \beta \leq 1$ と考えるのが自然である。ここでは最も大きな効果を与える $\beta = 1$ の場合を検討する。

図 3 には $\beta = 1$ の場合の対称エネルギー $S_0$ 、 $L$ 及び最適化の程度 $\Delta$ を示す。比較のため、図 1 の $\beta = 0$ の場合の結果を破線で示した。 $\beta = 1$ の場合の $(K_0, L)$ の許容領域(上段)は、それほど変わらないが $\beta = 0$ の場合よりもやや広くなる。これは同じ $(K_0, y)$ に対する $L$ の値が少し大きくなる(せいぜい1割程度)からである。最適化の程度は $L$ が大きくなるほど悪くなり、 $(K_0, y) = (350, -200), (360, -200), (360, -220)$ の場合には $L$ の値を決めることができなかった。

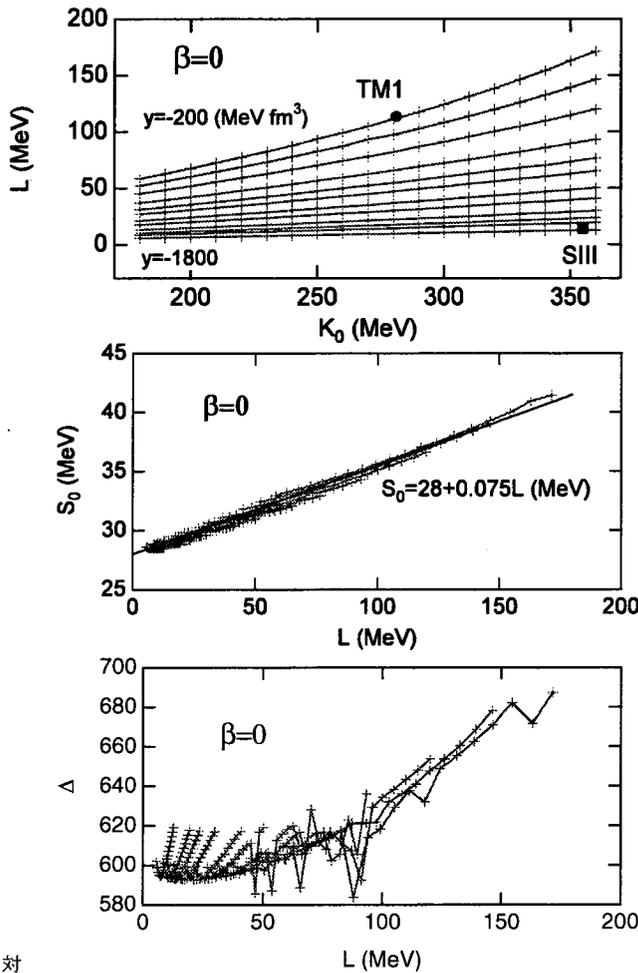


図 1 非対称勾配項なし( $\beta = 0$ ) のときに、経験的に許される( $K_0, L$ ) (上段)、そのそれぞれに対する( $L, S_0$ ) (中段)、最適化の程度 (下段)。同じ  $y$  の値のデータを実線で結んである。上段には比較のために、非相対論的 Skyrme Hartree-Fock 理論の SIII[9]での値(四角)と相対論的平均場理論の TM1[10]での値(丸)も示した。また、中段には計算によって得られた( $L, S_0$ )に対する回帰直線もあわせて示した。

図 3 中段に示すように、同じ  $L$  の値に対する  $S_0$  の値は 2 MeV 程度大きくなる。 $\beta > 0$  の場合には表面对称エネルギーが体積対称エネルギーの効果をキャンセルする方向に働くので、 $S_0$  及び  $L$  の値が  $\beta = 0$  の場合よりも少し大きくなったと考えられる。

図 4 には、 $\beta = 1$  の場合の表面勾配項の係数  $F_0$ 、対称核物質の飽和密度  $n_0$  及びエネルギー  $w_0$  の  $K_0$  依存性を示す。比較のため  $\beta = 0$  の場合の結果を点線で示してある。図 4 上段に示す  $F_0$  の値は、 $\beta = 0$  の場合と同様に  $K_0$  に対して減少、 $L$  に対して増加の傾向がある。ただし、 $\beta = 1$  の時の  $F_0$  の値の方がやや大きい。 $\beta > 0$  の場合には表面对称エネルギーが表面エネルギー

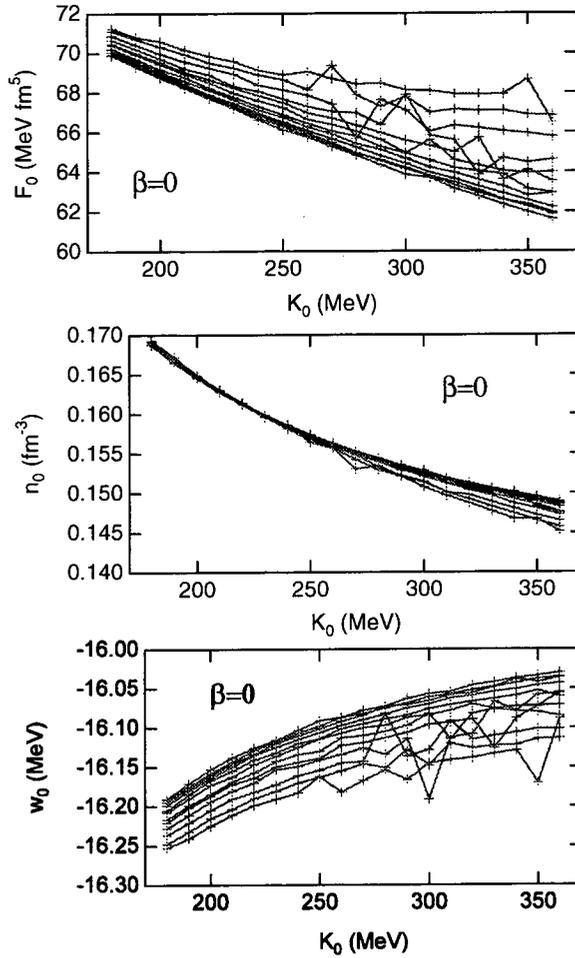


図2 非対称勾配項なし( $\beta = 0$ ) のときに、経験的に得られた  $(K_0, F_0)$ (上図)、 $(K_0, n_0)$ (中図)、 $(K_0, w_0)$ (下図)。同じ  $y$  の値のデータを実線で結んである。

ギーをキャンセルする方向に働くため、それを補うために  $F_0$  が大きくなったと考えられるがそれほど顕著な違いではない。また、図 4 中段の飽和密度  $n_0$ 、下段の  $w_0$  の  $\beta = 0, 1$  での違いも充分小さい。

### 5 まとめ

本研究では安定原子核の質量半径を再現する Thomas-Fermi 模型で、非対称な密度勾配項がどの程度のエネルギーを与え、またこの項のあるなしでバルクな対称エネルギーがどの程度違ってくるかを検討した。

この項は表面对称エネルギーの一部を与え、対称エネルギーを減少させる方向に働く。この効果を打ち消すために、この項がない場合と比べると、バルクな対称エネルギーはやや増大す

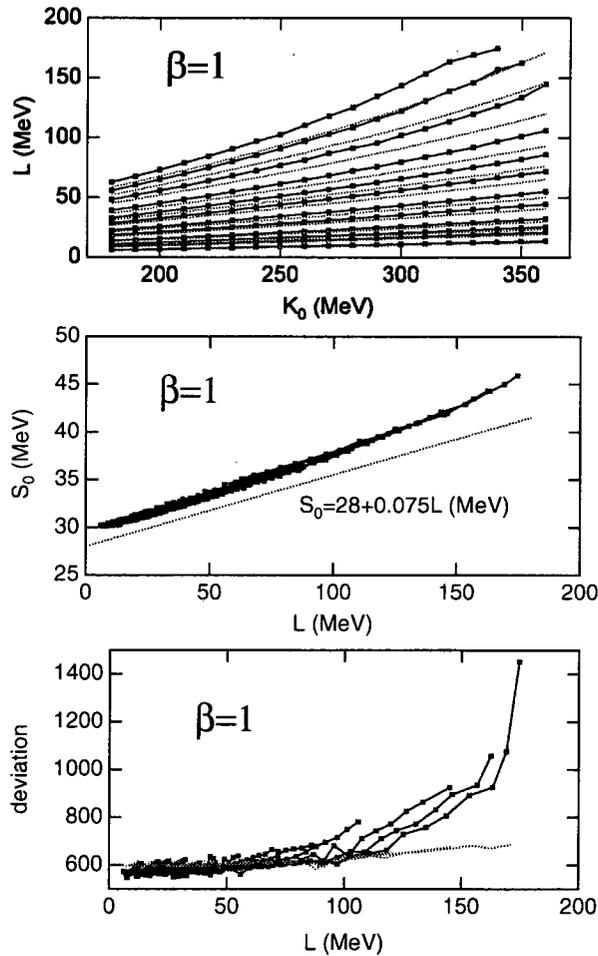


図3 非対称勾配項あり ( $\beta=1$ ) のときに、経験的に許される  $(K_0, L)$  (上段)、そのそれぞれに対する  $(L, S_0)$  (中段)、最適化の程度 (下段)。同じ  $y$  の値のデータを実線で結んである。比較のため  $\beta=0$  の場合の結果を点線で示した。

る。これによる  $S_0, L$  の値の増加は 5% からせいぜい 10% 程度である。 $S_0$  の大きさにすると 2.4 (MeV) であるが、これは核子間力を元にした第一原理的な計算の不確かさの範囲内である。

非対称勾配項は密度勾配項から生じるエネルギーを減らす方向に働く。その効果を打ち消すために、この項がない場合と比べると、密度勾配項全体の大きさを与えるパラメータ  $F_0$  の値を僅かに増大させるがそれほど顕著な違いではない。

以上のように、密度勾配項の陽子中性子非対称項の有る無しによって、バルクな対称エネルギーのパラメータ  $S_0, L$  と密度勾配項の強さ  $F_0$  の値にわずかな違いが生じる。これらは中性子過剰原子核の性質にある程度の影響を与えるだろう。定量的にこの効果を直接検証することが望ましく、今後の課題となる。しかし、 $S_0, L$  及び  $F_0$  の値の違いはわずかであり、それほど大きな影響を与えないと期待される。

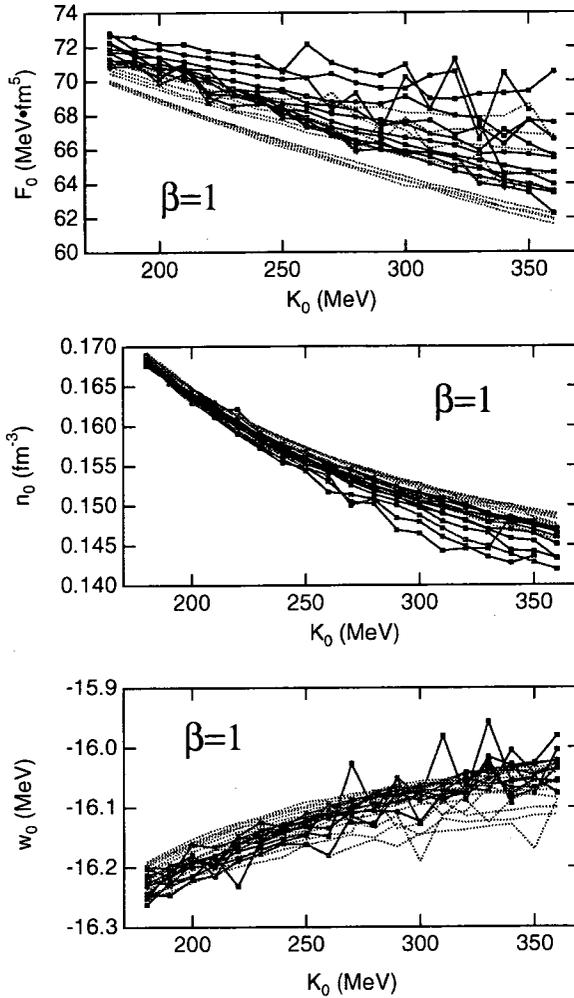


図4 非対称勾配項あり( $\beta=1$ ) のときに、経験的に得られた  $(K_0, F_0)$ (上図)、 $(K_0, n_0)$  (中図)、 $(K_0, w_0)$  (下図)。同じ  $y$  の値のデータを実線で結んである。比較のため  $\beta=0$  の場合の結果を点線で示した。

本研究は平成 21 年度愛知淑徳大学特定研究助成「密度汎関数法による原子核構造の研究」の支援を受けて行われた。

参考文献

[1] 親松和浩、飯田圭、小浦寛之： 原子核の液滴模型の再考、愛知淑徳大学現代社会研究科研究報告 3 号, (2008) 1.  
 [2] K. Oyamatsu, Nuclear Physics A 561, (1993) 431.  
 [3] K. Oyamatsu and M. Yamada, Nuclear Physics A 578, (1994) 181.  
 [4] I. E. Lagaris and V. R. Pandharipande, Nuclear Physics A 369 (1981) 470.

- [5] S.A. Buldman and C.B. Dover, *Physical Review C* **22**, (1980) 1333.
- [6] B. Friedman and V. R. Pandharipande, *Nuclear Physics A* **361**, (1981) 502.
- [7] A. H. Wapstra, G. Audi and R. Hoekstra, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **39** (1988) 281.
- [8] K. Oyamatsu and K. Iida, *Progress of Theoretical Physics* **109**, (2003) 631.
- [9] M. Beiner, H. Flocard, Nguyen Van Giai and P. Quentin, *Nuclear Physics A* **238**, (1975) 29.
- [10] Y. Sugahara and H. Toki, *Nuclear Physics A* **579**, (1994) 557.
- [11] K. Oyamatsu and K. Iida, *JAERI-Conf 2004-005*, (2004) 184-189.
- [12] K. Oyamatsu and K. Iida,, *Physical Review C* **75**, (2007) 015801.
- [13] J. Arponen, *Nuclear Physics A* **191**, (1972) 257.
- [14] M. Farine, J. M. Pearson and B. Rouben, *Nuclear Physics A* **304** (1978), 317.