導入期の除法の意味と計算が相互に関連する授業についての考察

Study of the Interaction of Procedural Knowledge and Declarative Knowledge
in the Division Induction Phase

星野 将直（Masanao HOSHINO）

1．問題の所在

算数・数学教育において，認知科学の成果を取り入れ，意味（宣言的知識）と計算（手続き的知識）が相互に関連する学習が行われている[1)]。また，その視点から具体物や半具体物を使った操作活動（以下具体操作）の方法について見直しも行われている[2)]。そこで，小学校第３学年の単元「除法」の導入期における除法の意味と除法の計算の扱いについて，現行6社の教科書を分析してみた[3)4)5)6)7)8)]。するとおおむね全社の流れは次のようになっている。例として啓林館『わくわく算数3上[3)]』を参照する。

除法の意味の指導

① 日常場面の問題を提示する

15このクッキーを3人に同じ数ずつ分けます。1人分は何個になりますか。（等分除）

② 数図ブロックを使った操作活動を行う

クッキーの代わりに数図ブロックを操作し，3 人に分配する。（トランプカード分配方式という方略を用いて成功裏に分配されている。）

③ 除法を定義付ける

15個を，3人に同じ数ずつ分けるときの1人分を求める式を「15÷3」とかきます。（記号「÷」を使い意味状況を式で表現する）

①②③の学習を通して「除法とはどのような場面なのか（この場合は○○を配分する場面）」「除法の場面はどのような構成なのか（最初の状態から最終の状態をつくること。全体－部分スキーマを使いながら最終の状態は均等配分状態であること）」を認識する。こどもの認識の姿は，文章題・図から○÷△と立式できることである。

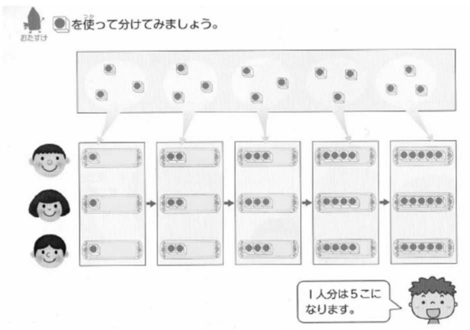


図1　除法の意味　啓林館『わくわく算数3上』より

除法の計算の指導

① 導入とは別の問題を提示する

24 個のあめを 3 人に同じ数ずつ分けると，1 人分は何個になりますか。（等分除）

② 数図ブロックを使わずに答えを見つけることを考える

意図的に具体操作と切り離されている。（1 人分の数）×3 が 24 個だから，1 人分の数は□×3=24 にあてはまる数と同じになります。1 個ずつでは，1×3=3。…。 7 個ずつでは，7×3=21。 8 個ずつでは，8×3=24。

③ □×3＝24 にあてはまる□の数が商であるので，24÷3 の答えを 8 とする

①②③の学習を通して，「除法の計算手続きを実行する場合には，除法の逆算である乗法を使って計算すること」を認識する。こどもの認識の姿は，乗法の式から当てはまる数を求めることができることである。

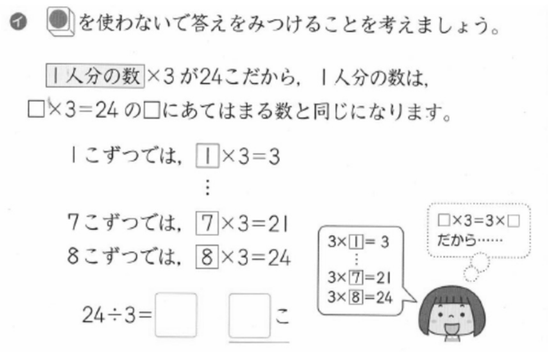


図 2　除法の計算　啓林館『わくわく算数 3 上』より

以上から，除法の意味の学習は数図ブロックの操作で行い，除法の計算の学習は数図ブロックを使わずに逆算である乗法を使うという流れになっている。文章題から○÷△と除法立式することができるために具体操作を行い，○÷△の計算は意味を思考した時と別の発想として乗法で行う。このような学習の流れでは，意味と計算が分離しており「除法を意味づけた時の具体操作をなぜ形式的な計算に切り替えるのか。」「除法という意味場面・計算にもかかわらずなぜ乗法を使って計算するのか」についても十分な理解を得られないまま学習が進行していると言わざるを得ない。

では，意味と計算が相互に関連するとはどのような学習であろうか。そこでは具体操作がどのように行われるとよいのだろうか。小学校第 1 学年の単元「減法」で学習する減加法・減減法を例に説明する。この学習では十進位取り記数法の原理を意識して計算をする。そのためにブロック等を使った具体操作が重視されている。仮に「13-9」の文章題として「ふくろに 13 個のあめが入っています。おともだちに 9 個あげると，のこりはいくつでしょう。」と図 3 を提示したとする。この場合，13-1-1-1-1-1-1-1-1-1=4 のように 1 を単に 9 回取るだけの具体操作で終わってしまい単に既習である求残の延長となり，減減法・減加法の発想には繋がらない。しかし，「10 個入りのたまご 1 パックと 3 個があります。りょうりで 9 個つかうと，のこりはいくつでしょう。」と文章題の状況構成を変えて図 4 を

提示したとする。この場合，「先に 3 個取って 10 個入りパックを開けて 6 個取る(減減法)」「先に 10 個入りパックを開けて 9 個取り 3 個パックにもどす(減加法)」という思考と具体操作が行われる(図 5)。その過程を式で表現すると 13-9=10-9+3，13-9=13-3-6 となり，意味に基づいた計算が可能となる。

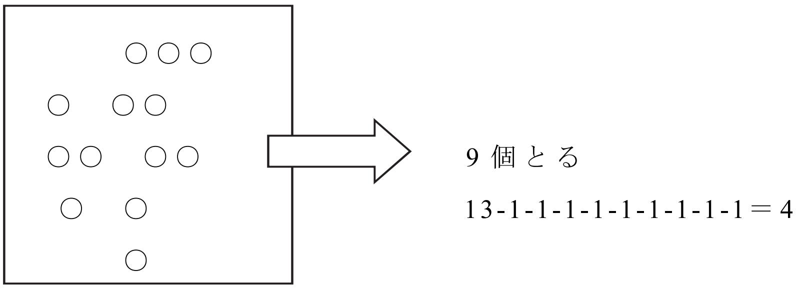


図 3　「13-9」の状況構成(1)

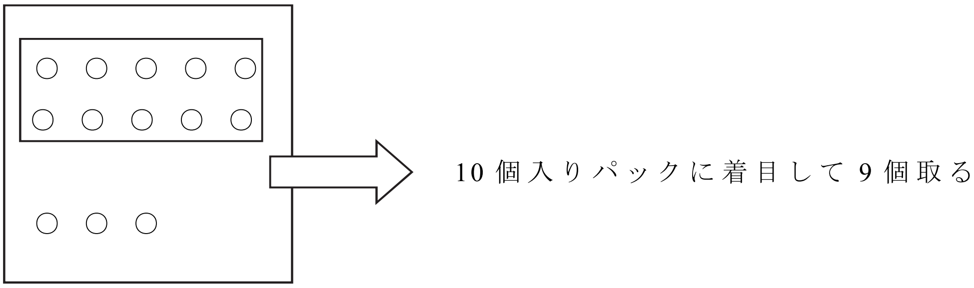


図 4　「13-9」の状況構成(2)

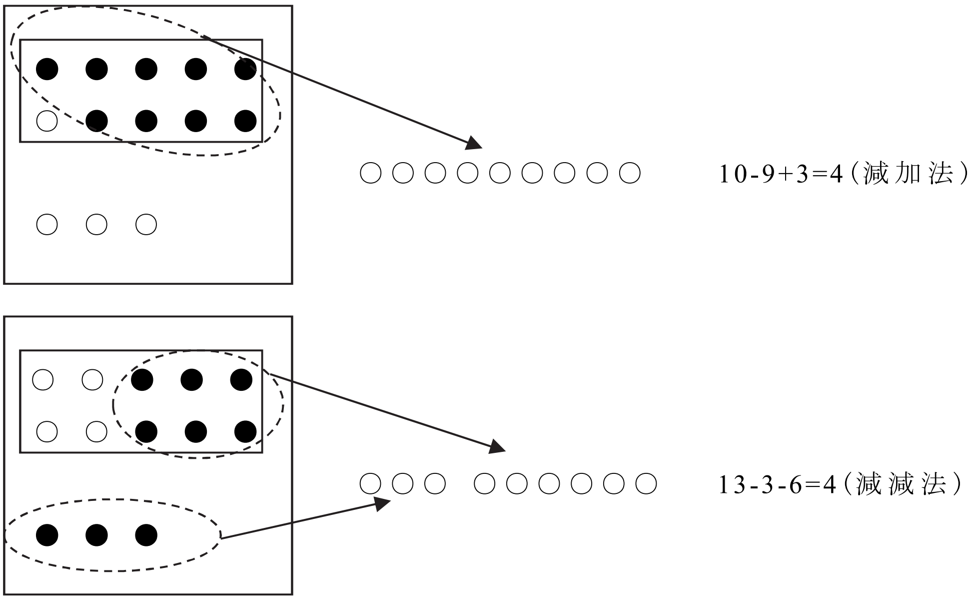


図 5　減加法と減減法の操作

導入期の除法においても，その具体操作が単なる日常的行為で終わらずに，数学的思考が働くように具体操作を対応させることが必要である。このような問題意識で，導入期の除法の意味と計算が相互に関連する学習を提案する。

2．意味と計算が相互に関連するための手立て

導入期の除法の学習では，等分除場面と包含除場面のどちらを先に指導したらよいかが問題となる。現行 6 社の算数の教科書では，「包含除→等分除」が 1 社，「等分除→包含除」が 5 社であり，等分除場面での導入が一般的である。

小学校学習指導要領解説算数編 [9]には「包含除と等分除を比較したとき，包含除の方が操作の仕方が容易であり，「除く」という意味に合致する。また，「割り算」という言葉の意味からすると等分除の方が分かりやすい。したがって，除法の導入に当たっては，これらの特徴を踏まえて取り扱うようにする必要がある。」とある。等分除場面を先行する理由として，「割り算」という言葉の意味が標準的な除法場面として認識させやすいということである。これは経験による言葉のイメージである。等分除場面の具体操作はこどもが除法として分かりやすいのだろうか。東京書籍『新しい算数 3 上 [8]』を参照して説明する。

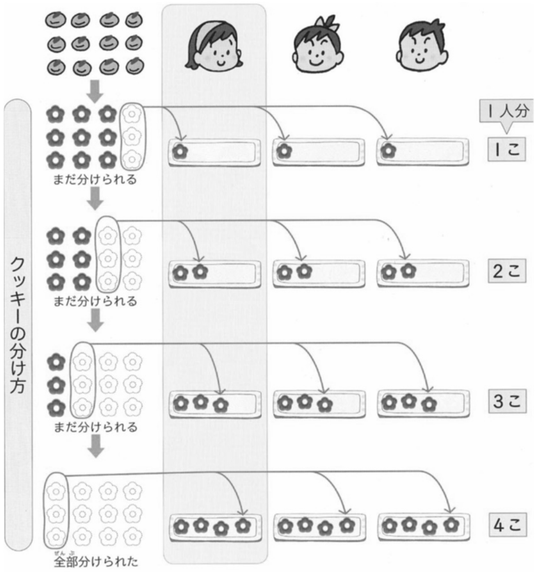


図 6　等分除の具体操作 東京書籍『新しい算数 3 上』より

図 6 は，「12 個のクッキーを 3 人に分けると，1 人分は何個になるか」という等分除場面の分け方である。最初にクッキー12 個が長方形(3×4)に配置されている。この最初の状態を縦に見るか，横に見るかによって，分け方が変わるはずである。縦に見た場合，3 個ずつを 3 人に配り，残った 3 個を 1 個ずつ配る 6 回の配分操作が自然な流れではないかと考えられる。また横に見た場合，4 個ずつで 3 人分ということが見えるので，4 個ずつを 3 人に配る 3 回の配分操作で終わる。教科書に見られるような最初に 1 個ずつ配り，次に 1 個ずつ配り，…配るものがなくなるまで 12 回配分操作を繰り返すというトランプカード分配方式の分け方をこの条件で行うとは考えにくい。したがって，具体操作においては，対象の「分ける前の状態」と「分けた後の状態」の状況を明確にした上で，こどもがどのように思考を働かせるか分析・検討する必要がある。

現行 6 社の算数の教科書の除法の図を見ると，対象の「分ける前の状態」と「分けた後

の状態」はおおむね，Ⅰ「一列型(縦横の直線)」・Ⅱ「規則型(長方形や対称図形)」・Ⅲ「不規則型」の 3 つがある。すると，スタートとゴールの状態の組み合わせは 3×3＝9 通りある。また，除法の意味場面として等分除と包含除があるので，それぞれの意味場面での現行 6 社の位置づけは次の表 1・2 になる。

Ⅰ「一列型(縦横の直線)」

○○○○○○○○○○○○

Ⅱ「規則型(長方形や対称図形)」

○○○○　　　　○○○○

○○○○　　　　　○○○○

○○○○　　　　○○○○

Ⅲ「不規則型」

○

○○○○

○○

○○○　　○○

図 7　分ける対象の置かれた状態

表 1　等分除場面の対象の配置状態

ゴール / スタート	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
Ⅰ	大日②		
Ⅱ	学図 東書	教出 日文	
Ⅲ	大日①	啓林	

表 2　包含除場面の対象の配置状態

ゴール / スタート	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
Ⅰ	大日②		
Ⅱ	学図 大日①	東書 教出 日文	
Ⅲ		啓林	

※学校図書→学図，東京書籍→東書，啓林→啓林館，日本文教出版→日文

教育出版→教出，大日本図書→大日の略

こどもは，対象を分ける時「分ける前の状態」と見ながら「分けた後の状態」になるように思考を働かせるはずである。例えば，等分除場面でトランプカード分配方式で配ることを意図的にさせたいならば「分ける前の状態」が規則的な配置でない方が，トランプ分配方式を用いることの意義が明確になる。また，包含除場面では取る数があらかじめ決まっているため「分ける前の状態」と「分けた後の状態」が同型の場合，合同移動となるので避けたい。つまり，等分除・包含除のどちらが除法として分かりや

すいかという議論でなく，文章題の状況におけるこどもの思考や構造認知を想定した上で「包含除→等分除」と「等分除→包含除」のどちらの認識－再認識の過程が適切かという議論が必要なのである。最初に「包含除→等分除」の過程の＜例 1＞を示す。

＜例 1＞「包含除→等分除」

文章題:「たまごが 2 パックと 4 個あります。1 人に 3 個ずつ配るとしたら，何人に配ることができますか。(包含除場面)」

T:たまごの代わりに，ブロックを使います。ブロックを 3 個ずつ順に取って皿においてもよいですが，皿におかなくても何人に配ることができるかわかります。ブロックをどのように使うとよいですか。

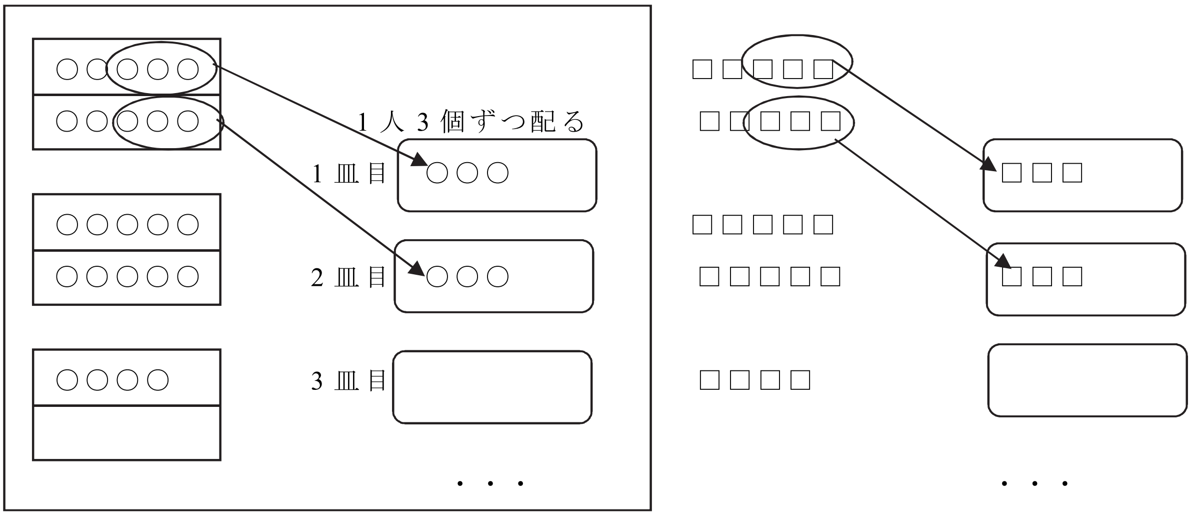


図 8　文章題の図と通常のブロック操作(包含除場面)

このように働きかけると，こどもは「分けた後の図」を見ながらブロックを操作し 3×8 の長方形(図 9)[10]に変形する。3 のかたまりが 8 あるので，ブロックを皿に置かなくても 8 人に配ることがわかると考えられる。

図 9　ブロックを操作した 3×8 の長方形[注 1)]の解釈

この具体操作は，24 個のブロックを使い「分ける前の状態」と「分けた後の状態」を認識することに意味がある。24 個のブロックから 3 個ずつを取って単純に配るのでなく，3×8 の長方形に変形し，皿におくとは 3 の辺を合同移動したのと同じ状態であるということを

認識する。そのために，「分ける前の状態」にある被除数 24 が，十進位取り記数法の構造(加法構造)であることを意図的に示すことによって，3 で分けるため別の構造(乗法構造)に変形する発想を促す。それが媒介認知となる。よって，この包含除場面を最初の乗法として「24÷3」と定義する。その意味とは 3×○＝24 の長方形を作り○の数を求めることになる。よって，24÷3＝○の計算とは 3×○=24 を求めることになる。

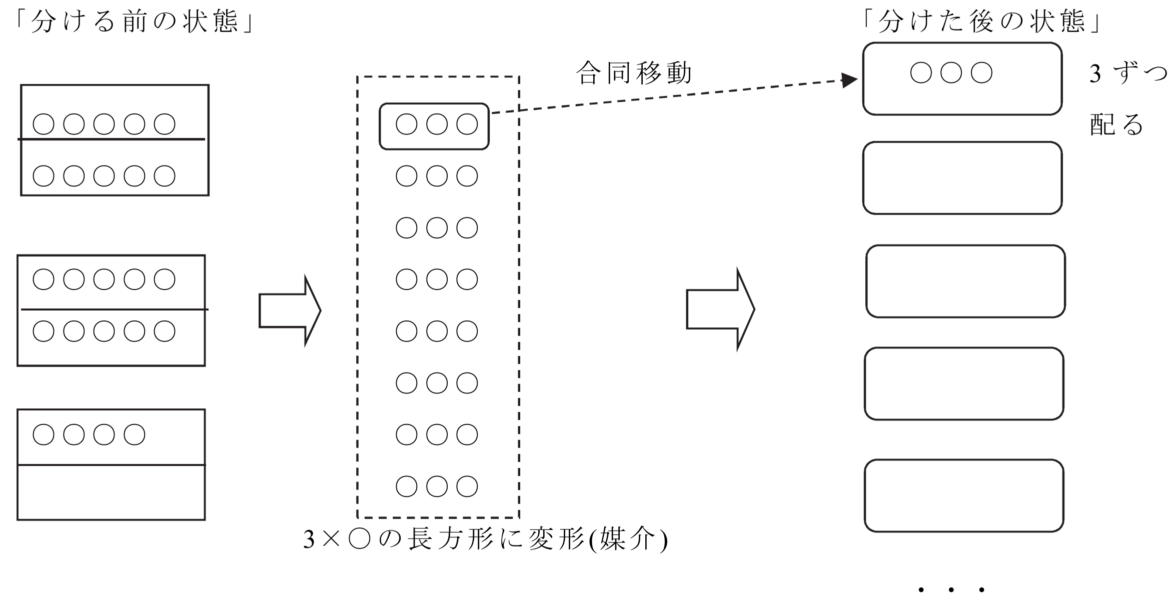


図 10　具体操作の媒介性(包含除場面)

では，＜例 1＞で包含除場面を除法として先に学習したこどもは，等分除場面をどのように学ぶのであろうか。同じ状況構成の文章題を想定して検討する。

文章題:「たまごが 2 パックと 4 個あります。3 人で同じ数ずつ分けます。1 人何個ずつ分けられますか。(等分除場面)」

T:前に学習した割り算は「24 個を 1 人 3 個ずつ分けるとき」でした。「何個分けるか」がわかっていました。今回は，「何個分けるか」がわからないのです。では，たまごの代わりに，ブロックを使って，3 人で分けるとき 1 人分は何個ずつになるか調べましょう。

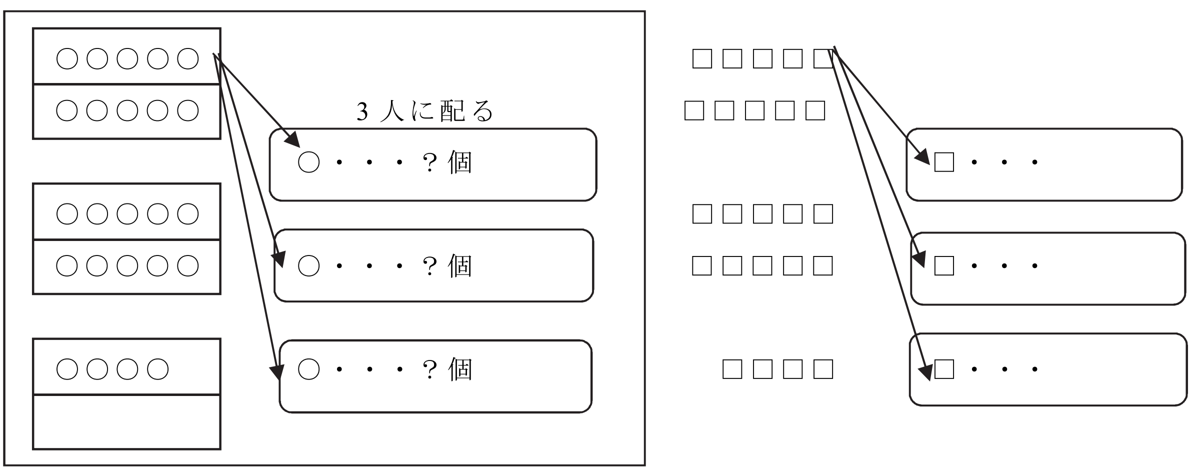


図 11　文章題の図と通常のブロック操作(等分除場面)

「3 個ずつ配る」より「3 人に配る」は，こどもにとって認知ギャップは大きいと考えられる。それは長方形の乗法構造を作るときの 1 辺の数が見えないからである。よって，等分除場面では包含除場面よりも，「分けた後の状態」を見てブロックを操作することが必要となる。しかし，先行の包含除場面で長方形に変形した経験もあるので，おそらく 8×3 の長方形に変形できると考えられる。結果，皿に置かなくても 1 人に 8 個ずつ配ることを認識できる。

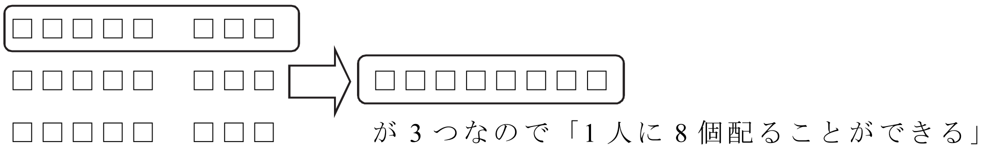


図 12　ブロックを操作した 8×3 の長方形(等分除場面)

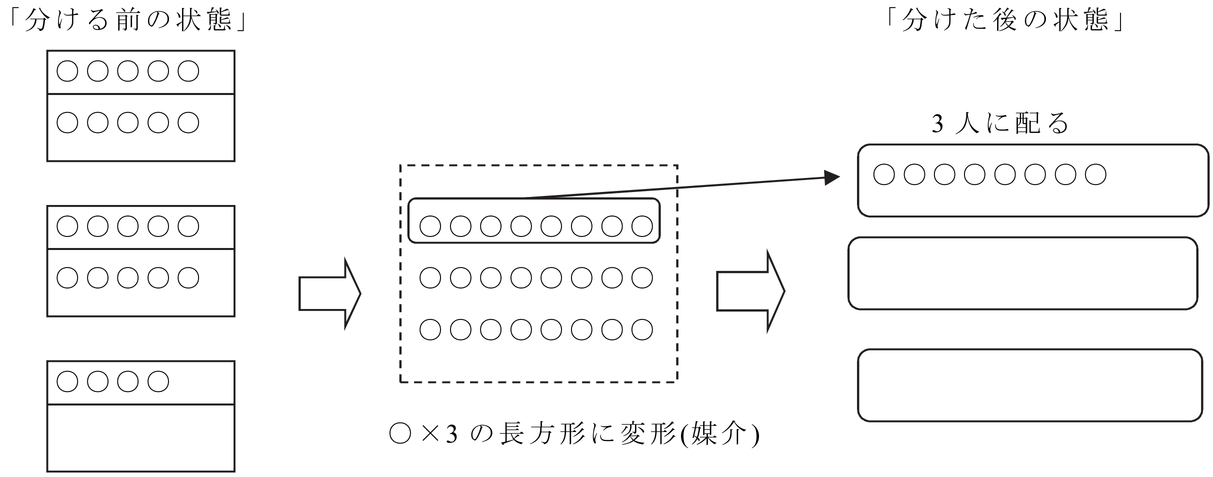


図 13　具体操作の媒介性(等分除場面)

さて，先行の包含除場面で「24 個を 1 人に 3 個ずつ分けると」という状況を除法として認識したこどもは，後行の等分除場面で「24 個を 3 人に分ける」という状況についても同じ除法として認識できるだろうか。そのためには，媒介として変形した 3×〇の長方形と〇×3 の長方形の構造が同型であることを認識させる手立てが必要である。

T: 「24 個を 1 人に 3 個ずつ分ける」も「24 個を 3 人に分ける」もどちらも「24÷3」と表していいですか。図 10 と図 13 のどこを見るとわかりますか。

このようにして確認してから，もう 1 つの除法として意味と計算の認識をさせる。24÷3 の意味とは〇×3＝24 の長方形を作り〇の数を求めることになる。計算については 24÷3＝〇なので，〇×3=24 と(1 当りの個数)×(いくつ分)と立式させるため，等分除場面では九九が使いにくいということが言われているが，同型の長方形に変形しているため 3×〇と同値と考えてもよいことになる。

以上から，＜例 1＞「包含除→等分除」の過程については，包含除場面を先行とすうことが長方形変形の発想が出やすいことが言える。また，後行の等分除場面での変形にもそれが転移可能となる。次に「等分除→包含除」の過程の例 2 を示す。

＜例 2＞「等分除→包含除」

文章題:「体育の時間で 24 人のこどもが整列しています。1 人も余らないように 4 チームに分けて対戦します。どのように分けることができますか。(等分除場面)」

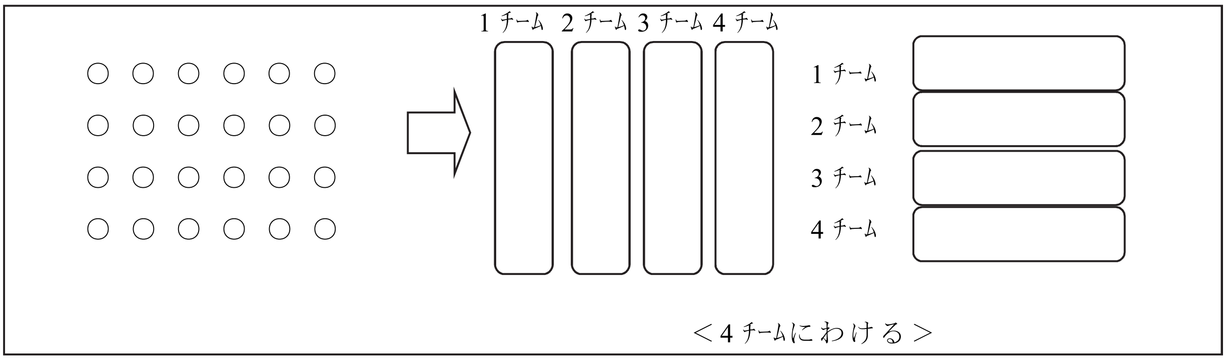


図 14　文章題の図(等分除場面)

T:人の代わりに 24 個のブロックを使って実際に確かめてみましょう。

C: （ブロックを実際に動かして)4 チームだと 1 チーム 6 人に分けられます。

T:ブロックをチームの場所に置かなくても 4 チームに分けた場合，1 チーム 6 人ずつだということがわかります。どうしたらよいですか。図 14 を見て考えてください。

このように働きかけると，おそらくこどもは，ゴールの図を見通して，図 15 のように囲みを入れて，均等に 4 分割すると考えられる。①②の囲み方は図 14 のゴールから見て標準的である。しかし，③④は合同ではあるがやや異例な囲み方である。

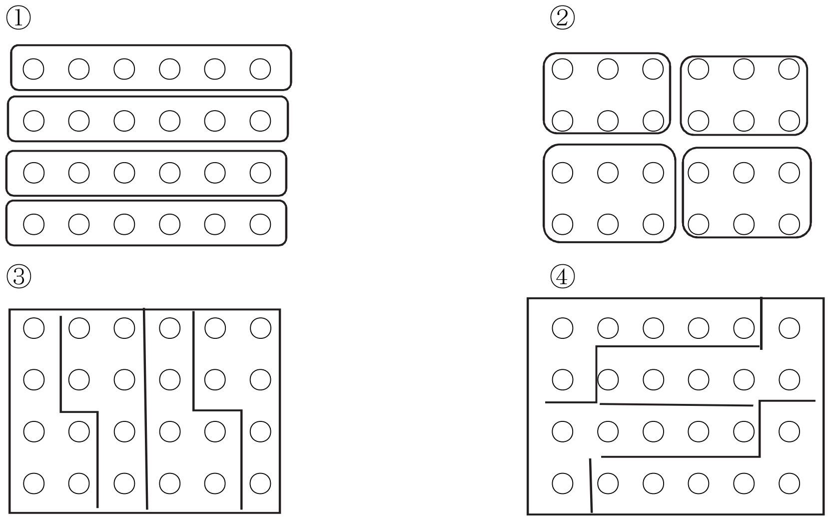


図 15　図に囲みを入れる操作(等分除場面)

等分除場面で除法を導入する場合，均等分割してちょうど分けられるということを示すことが必要である。そのために，合同な図形で分割することができるように，「分ける前の状態」は規則的な図形を配置する。よって，「24 人を 4 チームにちょうど分ける」を最初の除法として「24÷4」と定義する。このとき「24÷4＝〇」の〇を求めるには囲みを入均等な状態になるように囲みを 4 つ入れて，囲みの中にある数を求める。それは〇×4=24 にあてはまる数を九九で求めることと一致する。

では，＜例 2＞で等分除場面を除法として先に学習したこどもは，次に包含除場面をど

のように学ぶのであろうか。同じ状況構成の文章題を想定して検討する。

文章題:「体育の時間で 24 人のこどもが整列しています。1 チームを 4 人にして対戦します。全部で何チームできますか。(包含除場面)」

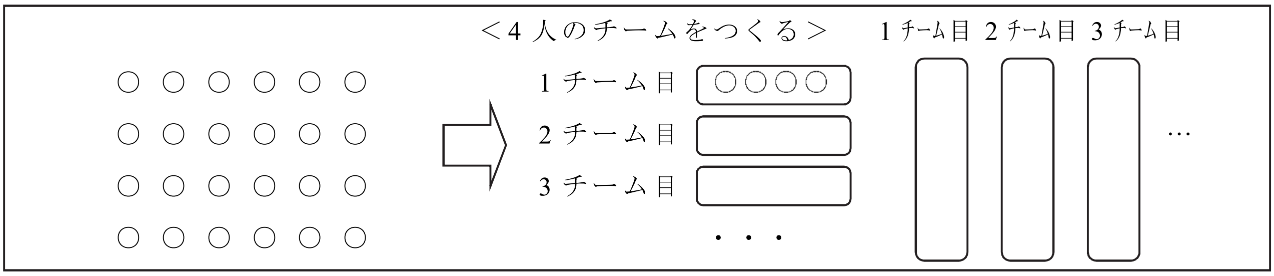


図 16　文章題の図(包含除場面)

T:前に学習した割り算は「24 人を 4 チームに分けるとき」でした。「何チームに分けるか」がわかっていました。今回は，「何チームに分けるか」がわからないのです。24 個のブロックを使って実際に確かめてみましょう。

C: (ブロックを実際に動かして)1 チームが 4 人のチームだと。6 チームです。

T:ブロックをチームの場所に置かなくても 1 チームが 4 人だと，6 チームに分けることができます。図 15 を見て考えてください。

このように働きかけると，おそらくこどもは，等分除での経験から図 17 のように 4 個ずつの囲みを作り，それらが 6 個あることを確認すると考えられる。①②③の囲み方は図 16 のゴールから見て標準的である。しかし，④は 4 個ずつ囲むと言った場合やや異例となる。

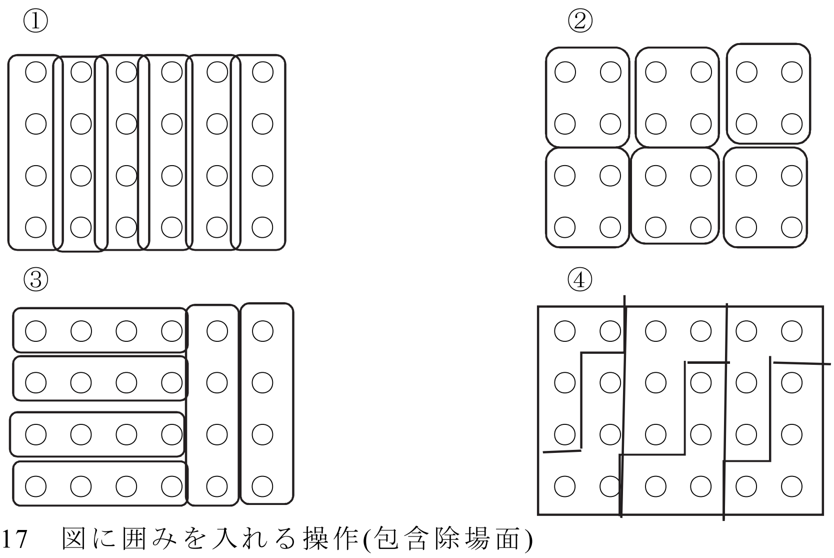


図 17　図に囲みを入れる操作(包含除場面)

さて，先行の等分除場面で「24 人を 4 チームに分けると」という状況を除法として認識したこどもは，後行の包含除場面で「24 人を 1 チーム 4 人に分ける」という状況についても同じ除法として認識できるだろうか。そのためには，媒介として囲みを入れた図の構造が同じであるが，囲みの解釈が違うことを認識させる手立てが必要である。

T: 「24 人を 4 チームに分ける」も「24 人を 1 チーム 4 人に分ける」もどちらも「24÷4」と表していいですか。図 15 と図 17 のどこを見るとわかりますか。

このようにして確認してから，もう 1 つの除法として意味と計算の認識をさせる。24÷4 の

意味とは積が 24 となる長方形で面積 4 の合同な図形の囲みが何個あるかを求めることになる。計算については 24÷4＝○なので，4×○=24 と 4×(いくつ分)と立式するので，九九としては 4 の段を求め○=6 となる。

以上から，＜例 2＞「等分除→包含除」の過程については，等分除場面を先行とするために均等等分割の発想が必要となる。また，この発想は後行の包含除場面にも転移可能とはなるが，本来包含除は面積が等しくても合同でない図 18 でもよいと解釈できるため，そこに困難点があると言える。

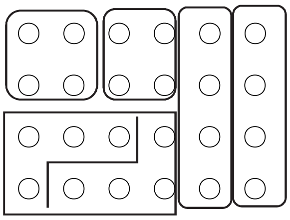


図 18　面積は等しいが合同でない囲み方(包含除場面)

３．考察

２．では除法導入期において，分ける対象の「分ける前の状態」と「分けた後の状態」を分析・検討することによって，こどもの思考や構造認知を想定した学習の可能性を示唆した。その反面，算数の教科書では「分けている状態」のみを除法認識とする指導の流れが一般的である。「分けている状態」のアルゴリズムのみで包含除場面や等分除場面の意味を正しく認識できるのであろうか。包含除場面から検討する。

包含除「12 個のクッキーを 1 人 3 個ずつ配ると，何人に分けられますか」

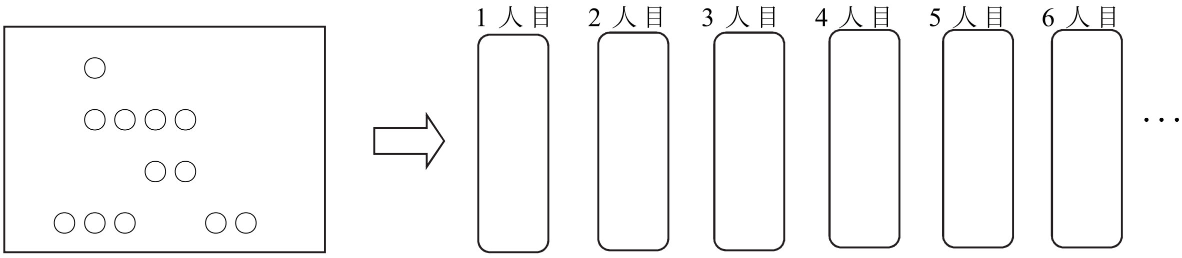
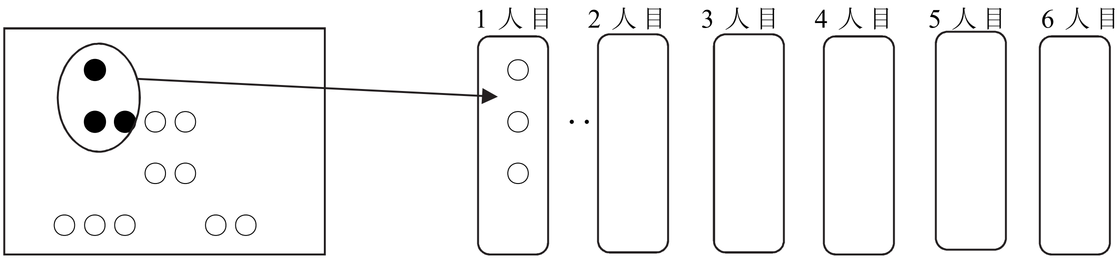


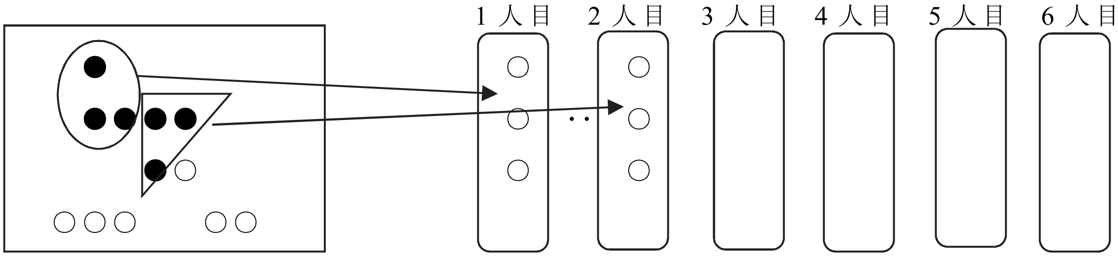
図 19 包含除の「分ける前」と「分けた後」の状態　Ⅲ「不規則型」→Ⅱ「長方形型」

①1 人目に 3 個配ると



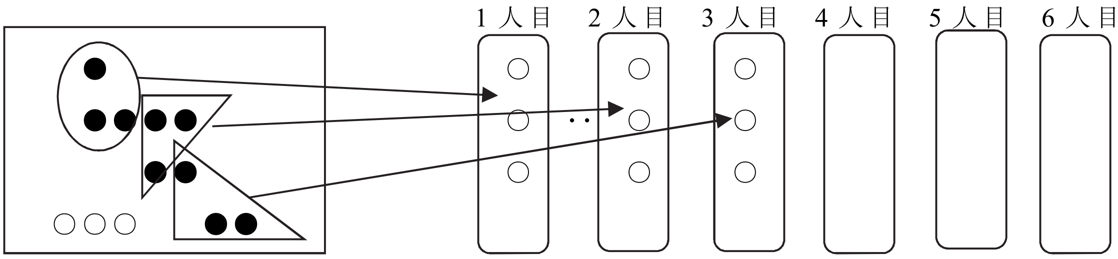
余りは，12-3×1=9「まだ分けられる」

②2 人目に 3 個配ると



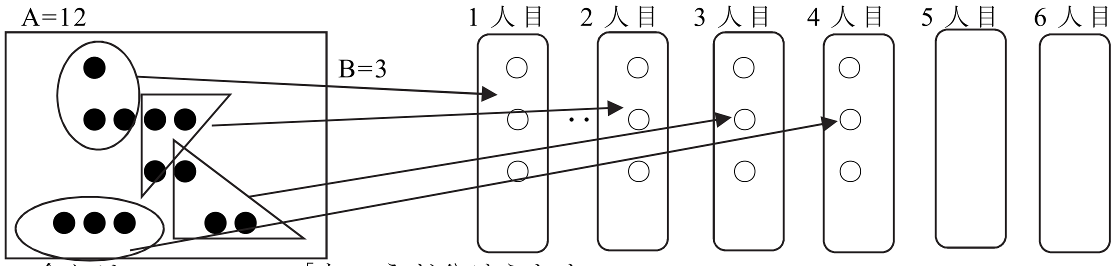
余りは，12-3×2=6「まだ分けられる」

③3 人目に 3 個配ると



余りは，12-3×3=3「まだ分けられる」

④4 人目に 3 個配ると



余りは，12-3×4=0「ちょうど分けられた」　C=4

図 20　包含除の「分けている状態」のアルゴリズム

図 20④から，等式 A＊B＝C として ABC の数量を読み取ってみる。A は●の数(枚)，B は 1 当たりの○の個数(枚／人)と読み取ることができる。C は対象の行く先の数(人)である。このことから，簡単に授業の流れを示すと次のようになる。図 20④について，既習の知識を使って具体操作を 12 と 3 の数を使って等式に表す [11)]。すると，「12-3-3-3-3=0」，「12-3×4=0」，「12=3+3+3+3」，「12=3×4」というような式がでてくる。しかし，これらの式は A＊B＝C という構造となっていない。そこで A＊B＝C とかくためには新しい記号が必要になる。12 個のクッキーを 1 人 3 個ずつ配ることから，記号「÷」を使って「12÷3=○」と表すことにする。さらに，「12÷3=○」の○を求めるためにはどうすればよいかが問題になる。均等に配分するには「12−3×○=0」のように余りが 0 になる原理を意識する必要がある。このことは「3×○=12」となる○を求める計算をすることと同値である。よって，○を求める計算とは，3×1，3×2，3×3，…と 3 の段の九九で 12 になる数○を見つけることになる。結果，図 20 では「分けている状態」からも，包含除場面での除法の意味と計算が相互に関連する学習が可能になる。次に，等分除場面についてトランプカード分配方式で行っていくと次のようになる。

等分除「12 個のクッキーを 3 人に分けると，1 人分は何個になりますか」

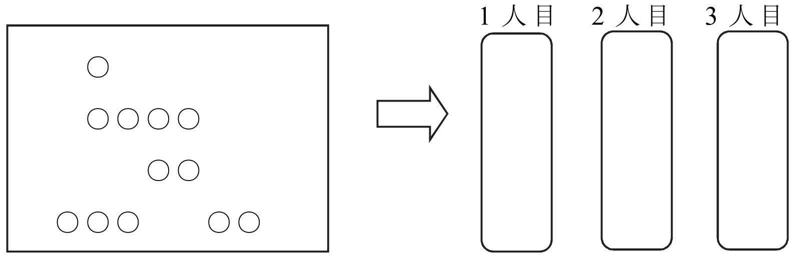
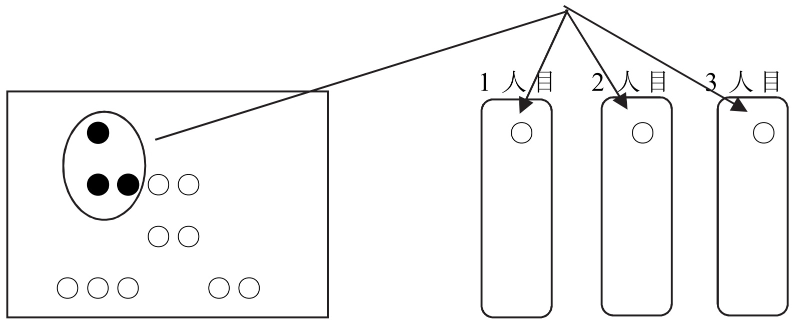


図 21　等分除の「分ける前」と「分けた後」の状態　Ⅲ「不規則型」→Ⅱ「長方形型」

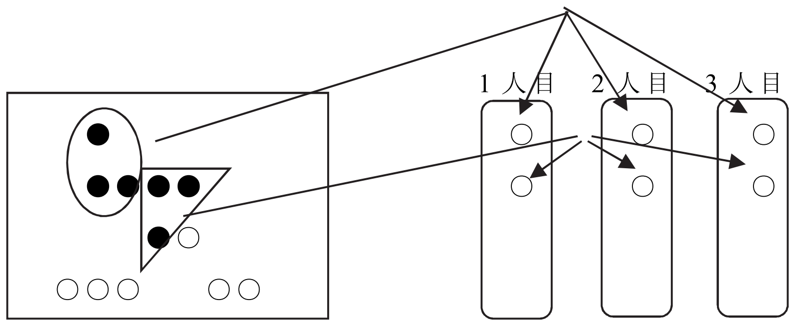
①3 人に 1 個ずつ分けると



余りは，12-1×3=9

「まだ分けられる」

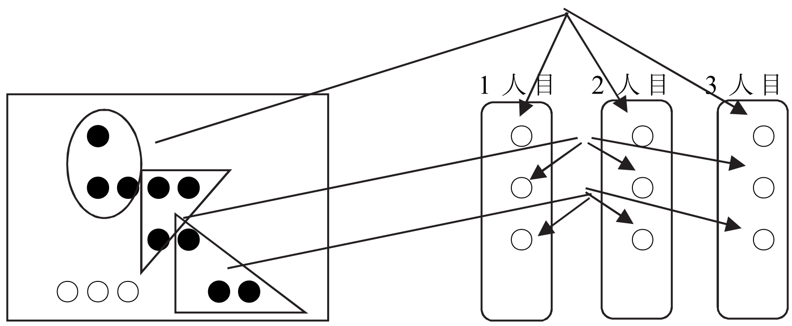
② さらに 3 人に 1 個ずつ分けると



余りは，12-2×3=6

「まだ分けられる」

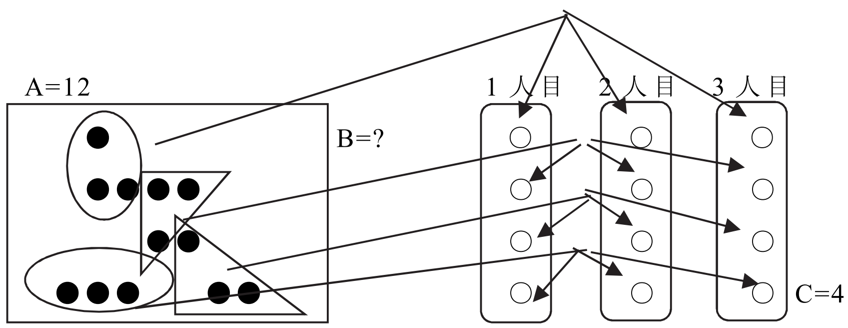
③ さらに 3 人に 1 個ずつ分けると



余りは，12-3×3=3

「まだ分けられる」

④ さらに 3 人に 1 個ずつ分けると



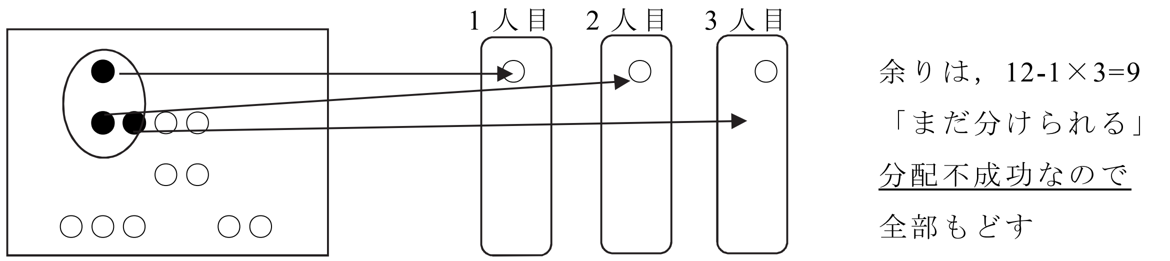
余りは，12-3×4=0

「ちょうど分けられた」

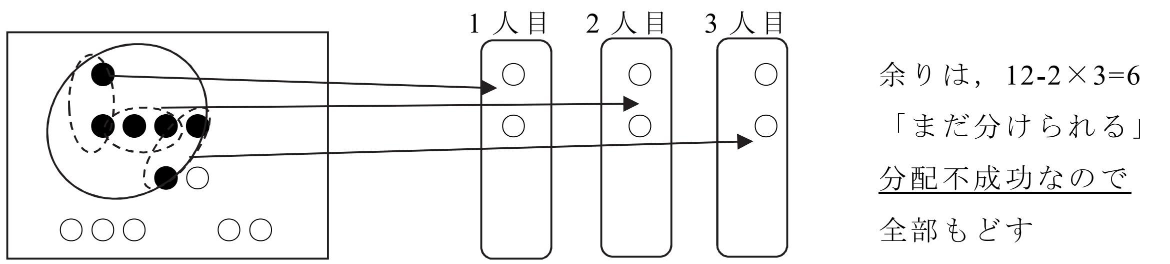
図 22　等分除におけるトランプカード分配方式のアルゴリズム

図 22④から，等式 A＊B＝C として ABC の数量を読み取ってみる。A は●の数(枚)，C は 1 当たりの○の個数(枚／人)である。しかし，B はどの対象の数量を読み取ったらよいかがわかりにくいのである。12÷3=4 という式での「いくつ分」である除数 3 がトランプカード分配方式では 3 等分している意識がなくなるためである[12]。さらに，図 22④の図は図 20④と同じであり包含除の図とも解釈できるので，等分除場面のトランプカード分配方式で「分けている状態」だけでは，除法としての意味の認識に困難点があると考えられる。そこで，このアルゴリズムを改良する代案を提案する。それは，「1 個ずつ配る」を繰り返さないで，「1 個ずつ配る」で余りが出たら全部回収し 1 個増やし，「2 個ずつ配る」を行い，また余りが出たら全部回収し 1 個増やす。これを繰り返すと図 23 のようなアルゴリズムになる。

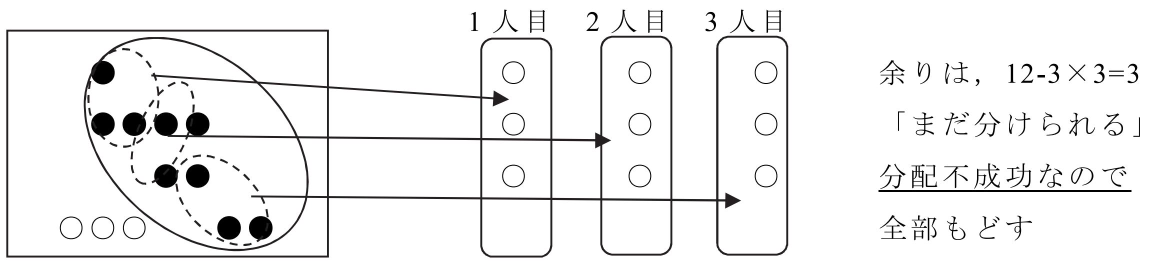
① 3 人に 1 個ずつ分けると



② そこで 3 人に 2 個ずつ分けると



③ そこで 3 人に 3 個ずつ分けると



④ そこで 3 人に 4 個ずつ分けると

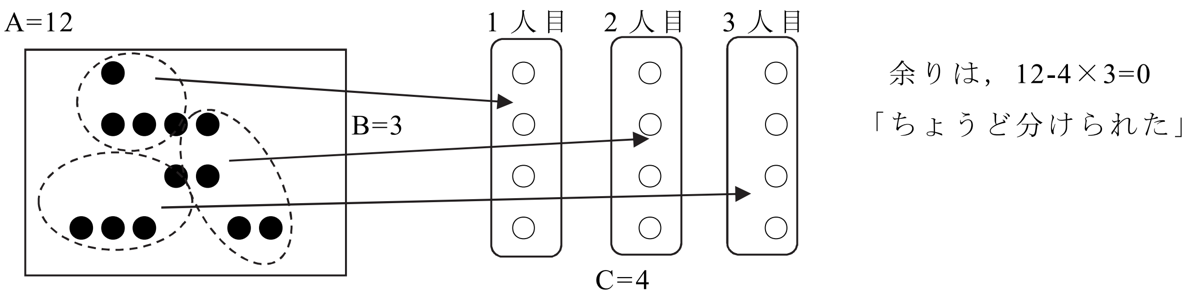


図 23　トランプカード分配方式を改良したアルゴリズム

すると，図 23④を見ると，等式 A＊B＝C として読み取る対象の単位について，A が●の数（枚），B が分ける対象の数（人），C が 1 当たりの○の数（枚／人）を読み取ればよいことがわかる。ただし，回収してやり直すことについての具体的な文章題の状況構成をどうするかが指導上の課題となる。

４．まとめ

加法では，意味場面として合併と増加がある。最初の段階はそれらの具体操作が異なっているため，仮に対等な２つの加法があることを認識する。次の段階は，あめやおはじきでなく，ブロックを使い，具体操作でできる図の構造が同型であることを構造認知させ，どちらも加法であると統合することが重要である。

同様に，除法の意味場面での包含除と等分除についても，単なる「除く」「割る」という操作でなく，意味ある具体操作を通して区別し，結果にできる図の構造認知をさせることにより統合することが，既習の学習からも適切な過程であると考える。

【引用文献・参考文献】

1)礒田正美・田中秀典（2009），『思考・判断・表現による『学び直し』を求める算数の授業改善』，明治図書，pp.23-24

2)佐伯胖（1998），認知科学から見た学校数学，『学校数学の授業構成を問い直す』，日本数学教育学会，pp.81-82

3)清水静海・船越俊介ほか（2010），『わくわく算数 3 上』，啓林館，pp.16-23

4)小山正孝・中原忠男ほか（2010），『小学算数 3 年上』，日本文教出版，pp.24-31

5)澤田利夫ほか（2010），『小学算数 3 上』，教育出版，pp.44-51

6)橋本吉彦ほか（2010），『たのしい算数 3 上』，大日本図書，pp.64-73

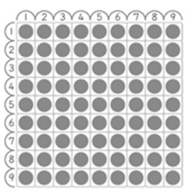
7)一松信ほか（2010），『みんなと学ぶ小学校算数 3 年上』，学校図書，pp.36-45

8)藤井斉亮・飯高茂ほか（2010），『新しい算数 3 上』，東京書籍，pp.38-47

9)小学校学習指導要領解説算数編(2016)，文部科学省，pp.146-147

10)市川伸一（2008），『「教えて考えさせる授業」を創る』，図書文化，pp.96-100

注 1)長方形のことをアレイ図（array）と言うこともある。



啓林館，算数用語集，

www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/.../page2_17.html

11)高橋喜一郎・清野佳子(2006)，算数科の研究，『新潟大学教育人間科学部附属長岡小学校研究紀要』http://hdl.handle.net/10191/20825

12)杉山吉茂（2008），「わり算は包含除-割合の理解の素地として-」，『日本数学教育学会誌』，90 ⑵，pp.2-6