割合の意味理解を促す指導の在り方

Teaching Methods to promote understanding the meaning of proportion

星野 将直（Masanao HOSHINO）

1. 割合の意味理解について

小学校 5 学年の単元「割合」で学習する割合の意味は児童にとって理解が難しく，教師にとっても難しい教材の 1 つと言われている [1)2)]．そこで，全国学力・学習状況調査報告書[小学校／算数](H20・H21・H24・H25・H30)[3)]から単元「割合」で学習する割合の 3 用法についての問題および正答率・誤答率をまとめてみた(表 1・表 2・表 3 参照)．

表 1　割合の求め方(第 1 用法　割合＝比較量÷基準量)

問題番号	問題の概要	正答と正答率	典型的な誤答と反応率
30A[8]	200 人のうち 80 人が小学生でした．小学生は全体の何％ですか．答を選択する．	40％を選択 53.1％	0.4%を選択　8.8% 2.5%を選択 27.6%
21A[7]	200 人のうち 80 人が女子でした．女子は全体の何％ですか．答を選択する．	40％を選択 57.1％	0.4%を選択 11.2% 2.5%を選択 22.6%

表 2　割合の求め方(第 2 用法　基準量×割合＝比較量)

問題番号	問題の概要	正答と正答率	典型的な誤答と反応率
25A[8]	200cm の 50%は何 cm ですか. 答を選択する. 500g の 120%は何 g ですか．答を選択する．	100cm を選択 76.9% 500g より重いを選択 77.1%	150cm を選択 6.4% 250g を選択 4.6% 500g より軽いを選択 16.5%
20A[9]	630 冊の 40%の冊数について立式･計算する．	620×0.4，248 冊 55.1%	620÷0.4，14.8% 620÷40，8.9%

表 3　割合の求め方(第 3 用法　比較量÷割合＝基準量)

問題番号	問題の概要	正答と正答率	典型的な誤答と反応率
24A[8]	8 人は全体の 25%のとき，全体の人数について立式・計算する．	8÷0.25，32 人 58.7%	8×0.25・8×25　10.1% 100 を使った式　4.6%
27B[2]	20%増量した洗剤が 480ml のとき，増量前の洗剤の量について立式・計算する	480÷1.2，400ml 13.4%	480×0.8, 27.6% 480÷0.2，480÷20 480×0.2，480×20 36.4%

また，5 学年では，単元「割合」と関連する単元「単位量あたり」についても学習する．同様に，全国学力・学習状況調査報告書[小学校／算数](H25・H30)[3)]から人口密度の問題およびその正答率・誤答率をまとめてみた(表 4 参照).

表 4　単位量あたり(人口密度)

<table>
<tr><th>問題番号</th><th>問題の概要</th><th>正答と正答率</th><th>典型的な誤答と反応率</th></tr>
<tr><td>30A[4]</td><td><table><tr><td></td><td>人数(人)</td><td>面積(m^2)</td></tr><tr><td>㋒</td><td>16</td><td>8</td></tr><tr><td>㋓</td><td>9</td><td>5</td></tr></table>どちらが混んでいるかを選択する.</td><td>1m^2 あたりの人数
㋒2㋓1.8 より㋒を選択
50.3%</td><td>1 人あたりの面積
㋒2㋓1.8 より㋒を選択 18.4%
1 人あたりの面積
㋒2㋓1.8 より㋓を選択 18.0%</td></tr>
<tr><td>25A[4]</td><td><table><tr><td></td><td>人数(人)</td><td>面積(m^2)</td></tr><tr><td>A</td><td>12</td><td>6</td></tr><tr><td>B</td><td>8</td><td>5</td></tr></table>どちらが混んでいるかを選択する.</td><td>1m^2 あたりの人数
A2B1.6 より A を選択
50.2%</td><td>1 人あたりの面積
A2B1.6 より A を選択 16.6%
1 人あたりの面積
A2,B1.6 より B を選択 18.7%</td></tr>
</table>

全国学力・学習状況調査は平成 19 年から毎年行われており，割合に関する問題と単位量あたりに関する問題の正答率は低いため課題となっている．そのため，指導の改善が図られてきているはずである．にもかかわらず，表 1 からは，割合の第 1 用法の問題の正答率は 50%台のままとなっている．加えて，200÷80 と立式してしまう誤答が 20%台もある．また，表 2 からは，割合の第 2 用法の問題は「○の□%は」とあるので比較的乗法に立式しやすいため正答率はやや高めであるが，誤答を見ると加法や減法を行っていることから割合の意味を考えずに計算している児童がいることが考えられる．さらに，表 3 からは，割合の第 3 用法の問題は比較量を割合の値で割るという考え方そのものが難しいため乗法で立式し計算しようとするなど，正答率が低くなることは予想できる．しかし，洗剤の問題で 20%増量が 120%であるということが理解されていない．このことは割合の第 3 用法の使い方の理解よりも,割合の意味そのものが十分に理解されていないことが問題である．表 4 からは，理解が表面的であり，1m^2 あたりの人数を求めるならば 8m^2÷8 なので人数は 16 人÷8 のようにどちらも 8 でわるという割合で必要な「倍の見方」ができていない.

そもそも第 5 学年の単元「割合」での割合についての学習とは，割合の 3 用法の使い方の学習ではないはずである．例えば「30%の濃度の食塩水」に水を足せば薄まるが(濃度が下がるが)，食塩の量は変わらない．そこで「濃度 30%の食塩水 100g に何 g の水を足したら濃度が 10%の食塩水になるか．」という問題がある．中学生以上であれば，ビーカーと

と食塩と水の図をかき，足す水の量を x(g)として方程式をたてて解決することが考えられる．しかし，割合としての濃度の意味を理解していれば方程式を使わなくても実は解決できるのである．これが，割合の意味を理解できているということではないかと考える．

２．単元「割合」にかかわる単元間・単元内の認識 GAP について

教材配列には，先行関連学習事項(以下，M_0)と本習事項教材(以下，M_1)と後続発展学習事項(以下，M_2)の流れがある．教師は適切に教材配列することによって，こどもが認知－再認知による知識形成を行えるように支援する．この過程において，こどもは自身のもつ既有の知識構造(以下，F_0)に，新たな情報を組み入れながら知識構造を変容・再変容させていく(以下，F_1・F_2)．図 1 に示したように，新しい情報がこどもの既有の知識構造に組み込まれるときの認識 GAP を想定し，整合的に組み込まれるよう支援を工夫する必要がある．また，認識 GAP は単元間と単元内にあるため，最初に単元間の認識 GAP を検討し，単元内の認識 GAP および解消の手立てを提案する．

教材配列	先行関連学習事項(M_0)→本習事項教材(M_1)→後続発展学習事項(M_2)
	認識 GAP　　　認識 GAP
学習者の認識	既有知識構造(F_0)→知識構造の変容(F_1)→知識構造の再変容(F_2)

図 1　教材配列と学習者の認識

(1) 単元間の認識 GAP について

単元「割合」は昭和 33 年度版学習指導要領以降，第 5 学年での指導がなされてきている.そこで，単元「割合」を M_1 としたとき M_0－M_1－M_2 の系列において，どの単元が M_0 なのか，M_2 なのかを確認する．新学習指導要領においては，4 学年で単元「簡単な割合」がスパイラル的に導入され，単元「速さ」が 6 学年から 5 学年に移行することとなった．そこで，算数科の検定教科書 6 社のホームページで公開している単元配列表を参照すると，単元「割合」と関連する単元である「単位量あたり(人口密度など)」「速さ」「比」は，図 2 のような配列となっている．

	4 年	5 年	5 年	5 年	6 年
Ⅰ型：	「簡単な割合」→	「人口密度」→	「速さ」→	$\boxed{\text{「割合」}}$→	「比」

4 社 教出・東書・日文・学図

Ⅱ型：「簡単な割合」→「人口密度」→$\boxed{\text{「割合」}}$→「速さ」→「比」

2 社 啓林・大日本

図 2　「割合」に関連する単元の配列

この配列の過程で学習者が認知－再認知をするとき，単元間での認識 GAP が想定される．以下に概観する．

こどもは，4 学年までに「長さ」「かさ(体積)」「広さ(面積)」「時間」「角度」という外延量について学習してきている．それらはいずれも 1 つの量の状態で直接・間接での大小関係の比較ができ，任意の単位・普遍単位での測定の対象であった．それに対して, 2 つの量が関係した状態について大小関係を比較することはこどもにとって容易でないことは明らかである．図 3 に示したように，2 つの量が関係した状態について大小比較をするには，「**2 つの量をそのまま並べて簡単な 2 つの数で表す**」「**2 つの量が関係した状態を 1 つの数に表す**」という方法を考えなければならないからである．したがって，こどもにとっての認識 GAP が想定されるのである．問題例を基に認識 GAP の内容について検討する．

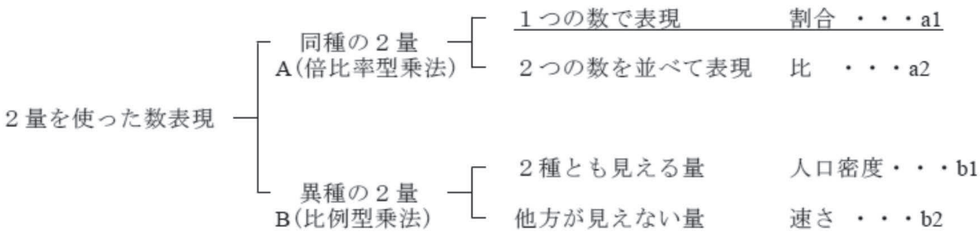


図 3　2 つの量の関係する状態の数表現 4)

最初に問題例 1 として，シュートをして投げた回数と入った回数が図 4 の場合で，「1 班と 2 班とでは，<u>投げた回数に対して入った回数を調べたとき</u>，どちらの班のシュートが入りやすいですか．」と問われたとする．

	投げた回数	入った回数
1 班	20	16
2 班	15	9

図 4　(問題例 1)シュート投げで投げた回数と入った回数

まず問い方についてである．1 つの量の状態での大小比較から，2 つの量が関係した状態での大小比較について検討する際, 2 つの量が同種であればそれぞれの量を x と y としたとき，「<u>量 x に対しての量 y について調べたとき，</u>どちらの方が起こりやすいか」というように問うべきである．この指示がなければ「投げた回数が少ない方がうまい」とか「入った回数が多い方が調子がいい」など 1 つの量の特性に目を向けて大小を判断する可能性があるからである．そのため，この部分については著者が意図的に問題例 1 から下線を引いて示してある．

問題例 1 では，シュートの入りやすさについて，**「2 つの数で表す方法」**を使うとすると，「比」を用いることになる．それは，そのまま並べると「20 と 16」「15 と 9」となる．2 量の状態を比較するためには，どちらかの数をそろえて大小比較する必要がある．そこで，両班とも投げた回数を「5」とすると入った回数が 1 班は「4」，2 班は「3」と数値化され，「20:16=5:4」「15:9=5:3」という比をつくることができる．また 20 と 15 の公倍数「60」を使って「20:16=60:48」「15:9=60:36」ともすることができる．結果，1 班の方が入りやすいということになる．ここで，留意すべきことは，「比」を用いた場合「20:16」の比を 4 で割ることで「5:4」を導いている．この見方は割合の学習で用いる「倍の見方」である．よって，比を使うには「倍の見方(比例の見方ということもある)」を理解しておく必要がある．また，単元の配列については，2 つの量が関係した状態を大小比較する場合，2 つの数をそのまま並べて簡単な数の比に表すことは，こどもにとって素朴な方法と考えられるが，学習指導要領では単元「比」は 6 学年で学習することになっている．したがって，最終として学習する単元「比」では，それまで学習した「割合」「人口密度」「速さ」について，それらをまとめて，「2 量を使った数表現」という知識として体系化をする必要がある．

また，問題例 1 では，シュートの入りやすさについて，**「1 つの数で表す方法」**を使うとすると，投げた回数に対して入った回数の「割合」を用いることになる．それは 20 回のうち 16 回というのは何倍かということであるので倍比率型の乗法構造(20×□＝16，15×□＝9)となる．この式を逆算すると 1 班は「16÷20=0.8」，2 班は「9÷15=0.6」となり 1 班の方が入りやすいということになる．しかし，こどもは既習である外延量の大小比較で「差の見方」を学習している．そのため，1 班は「20-16=4」，2 班は「15-9=6」とも数値化できるので，差が少ない(失敗が少ない)という理由から 1 班の方が入りやすいと結論することもできる．これらのことから「○○の起こりやすさ」を問われたとき，なぜ「差の見方」をしてはいけないのか．「差の見方」から「倍の見方」に切り替えることができるかが認識 GAP となる．

次に，問題例 2 として，エレベーター内にいる人とエレベーターの面積が図 5 の場合で，「1 号機と 2 号機とでは，どちらが混んでいるか.」と問われたとする．

	面積(m^2)	人数(人)
1 号機	6	18
2 号機	5	16

図 5　(問題例 2)エレベーター内にいる人の数とエレベーターの面積

問題例 1 では，2 つの量が回数という同じ種類の量であったので，「投げた回数に対して入った回数を調べたとき，どちらの班のシュートが入りやすいですか．」と量の

対象を示して問うことができた．しかし，問題例 2 では，2 つの量が異なる種類のため，単に「どちらが混んでいるか」と問うことになる．そこで，大小比較するためには，面積(m^2)と人数(人)という異なる単位を統合・融合し新たな単位をつくることが必要となる．それが「単位量あたりの見方」を用いてできる人/m^2 や m^2/人という誘導単位である．このことは子どもにとって大きな認識 GAP になる．2 つの単位を統合・融合するため**「1 つの数で表す方法」**を使うことになる．1m^2 あたりの人数を求め，1 号機は「18÷6=3 人/m^2」，2 号機は「16÷5=3.2 人/m^2」となり，1m^2 あたりの人数が多い 2 号機が混んでいることになる．しかし，m^2/人という単位もつくることが可能であるため，m^2/人と人/m^2 とではどちらが大小比較するのにわかりやすい単位かということが認識 GAP となる(表 4 参照)．さらに「単位量あたりの見方」に加えて留意すべきことがある．それは，18÷6 を計算するのは，6m^2 を 1m^2 にする，そのために 18 を 6 で割るという見方が前提となっている．つまり，問題例 2 の解決においても「倍の見方」が前提となっているのである．

最後に，問題例 3 として，図書館までの道のりとかかる時間と道のりが図 6 の場合で，「えりとゆうたとではどちらが速いでしょうか．」と問われたとする．

	道のり(km)	時間(分)
えり	3	20
ゆうた	2	15

図 6　(問題例 3)図書館までかかった時間と道のり

問題例 3 は問題例 2 と同様に，2 つの量が異なる問題なので，単に「どちらが速いか」と問うことになる．そのため，道のり(km)と時間(分)を統合・融合し，新たな単位をつくりその値で大小比較をする．しかし，問題例 2 との違いは，道のりは線分図で表せても，時間は図で表せないので，単位がイメージしにくい．単元「単位量あたり(人口密度)」では離散量(面積)と外延量(人数)を扱っていたため，図をかいて人を平均化・均質化すれば，面積か人数のどちらかについての単位の意味が理解されやすい．対して，単元「速さ」では，扱う量が外延量(道のり)と外延量(時間)であるためどのような図をかけば単位を理解しやすくなるのかが認識 GAP となる．これらのことをふまえた上で km/分か分／km という単位をつくることになる．1 分あたりに進む道のりを求め，えりは「3÷20=0.15km/分」，ゆうたは「2÷15=0.13km/分」となり，1 分あたりに進んだ距離が長い方が速いことになるので，えりが速いことがわかる．しかし，分/km という単位で求めると，陸上の短距離走でのタイムのように数値が小さいほど速いことがわかる．ここでも 2 つの単位のうち大小比較をするのに適した単位はどちらかを理解させることが必要になる．このように単元「単位量当たり(人

口密度)」と単元「速さ」は，異種の 2 量であっても，「**2 量が見える量**」・「**1 量が見えない量**」という違いがあり，こどもにとっての認識 GAP となる．また，このため単元「速さ」の前に単元「単位量あたり(人口密度)」を扱うのである．

以上の議論から，単元「割合」と関連する単元である「人口密度」「速さ」「比」の配列の視点とこどもの認識 GAP についてまとめる[5]．1 点目は，2 量が関係した状態について大小比較をする学習は,「1 つの数で表現するか･2 つの数で表現するか」,「1 つの数で表現する場合，2 量が同じ種類か・異なる種類か」，「2 量が異なる種類の場合，見える量か・見えない量か」ということが教材を配列する視点となる．2 点目は，「比」「割合」「人口密度」「速さ」では，いずれも 2 量の関係について数値化をするとき，「倍の見方」が必要になる．「倍の見方」をどの段階で指導するかが重要である．また，「人口密度」「速さ」では「単位量あたりの見方」が必要である．これらの 2 点と新学習指導要領で示された内容をもとにした算数科の単元配列(図 2 のⅠ型・Ⅱ型)に応じたこどもの認識 GAP の全体像は，図 7・図 8 のようになる．

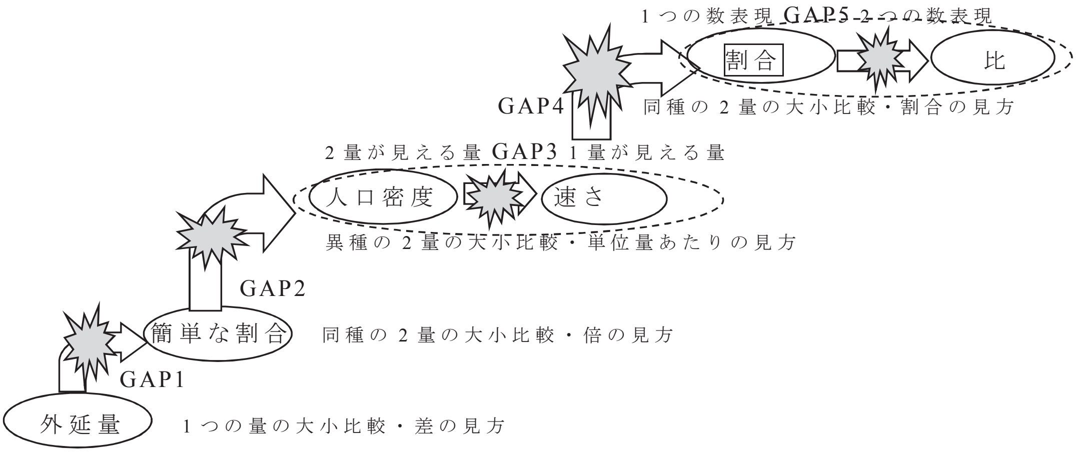


図 7　Ⅰ型の単元配列におけるこどもの認識 GAP の全体像

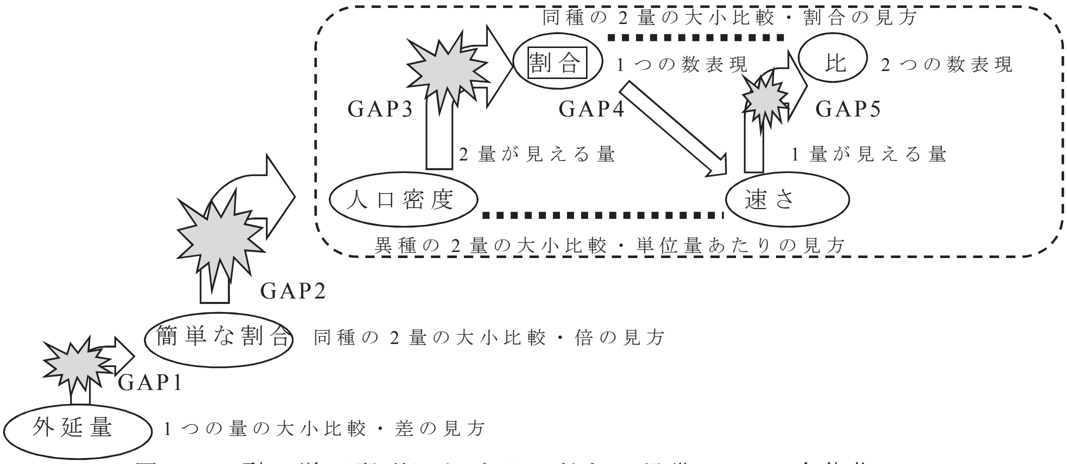


図 8　Ⅱ型の単元配列におけるこどもの認識 GAP の全体像

(2) 単元内の認識 GAP について

(2)では，新学習指導要領から 4 学年で導入されることになった①単元「簡単な割合」と②5 学年の単元「割合」での認識 GAP とそれらを解消する手立てについて提案する．

①4 学年単元「簡単な割合」での認識 GAP および解消の手立て

新学習指導要領解説算数科編によれば，4 学年で導入される単元「簡単な場合についての割合」の「簡単な場合」とは，割合が整数倍になることを扱うことを示している．また，比べ方には差で見る場合と割合で見る場合があり割合で見る場合を扱うことをトマトの値上げの割合(離散量)と平ゴムの伸びやすさ(分離量)を例に示している．特に平ゴムの例は図をかいて比較することで「倍の見方」の理解を強調しているものと考えられる．

> (2) 二つの数量の関係に関わる数学的活動を通して，次の事項を身に付けることができるよう指導する。
>
> ア 次のような知識及び技能を身に付けること。
>
> (ア) 簡単な場合について，ある二つの数量の関係と別の二つの数量の関係とを比べる場合に割合を用いる場合があることを知ること。
>
> イ 次のような思考力，判断力，表現力等を身に付けること。
>
> (ア) 日常の事象における数量の関係に着目し，図や式などを用いて，ある二つの数量の関係と別の二つの数量の関係との比べ方を考察すること。
>
> ある二つの数量の関係と別の二つの数量の関係とを比べるとは，A，Bという二つの数量の関係と，C，Dという二つの数量の関係どうしを比べることである。比べ方には大きく分けて，差でみる場合と割合でみる場合があるが，ここでは，割合でみる場合を扱う。
>
> 第 4 学年では，特に，簡単な場合について，割合を用いて比べることについて指導する。簡単な場合とは，二つの数量の関係が，基準とする数量を 1 とみたときにもう一方の数量が，2 倍，3 倍，4 倍などの整数で表される場合について，二つの数量の関係と別の二つの数量の関係とを比べることを知る程度を指している。

新学習指導要領解説算数科編による [6)]

以下に，新学習指導要領解説編で示された 2 つの例を用いて，GAP1 をどのように解消できるのか検討する．まず 2 量の関係した状態の大小比較場面で，はじめから「倍の見方」を使って解決させるのではなく，既習である「差の見方」でも解決できる問題を提示することである．具体的には，図 9 にあるように「A 店でトマトとミニトマトが値上げされて売っていた．<u>もとの値段に対して値上げした値段を見たとき</u>，より多く値上げしたのはどちらですか．」と問う．問題㋐では，「差の見方」で「トマト 1 個 200-100=100 円」「ミニトマト 1 個 300-100=200 円」となり，ミニトマトが多く値上げされたと捉えることができる．仮にこどもから「倍の見方」が出されたとしてもこの場合はミニ

トマトが多く値上げされたことになる．その上で，「差の見方」では解決できない問題㋑を考えさせる．「同じトマトがA店とB店で売っていた．もとの値段に対して値上げした値段を見たとき，より多く値上げしたのはどちらの店ですか．」この問題では，「差の見方」をすると「A店のトマト1個200-100=100円」「B店のトマト1個150-50=100円」となるので，どちらも差が同じになる．そこで「A店のトマト1個100×2=200円で2倍」「B店のトマト1個50×3=150円で3倍」となるので，新しい見方として「倍の見方」がでてくる．「倍の見方」をすることで，B店のトマトがより多く値上げされたことがわかる．さらに，トマトの問題例は離散量の問題なので，続いて図10にあるように連続量である平ゴムの問題を扱う．「A社製の平ゴム①と②がある．最初の長さに対して伸ばした後の長さを見ると，よく伸びるのはどちらのゴムですか．」この問題㋒では，「差の見方」をすると「平ゴム①200-100=100cm」「平ゴム②300-100=200cm」となるので，平ゴム②ということになる．離散量の問題と同様に，「差の見方」では解決できない問題㋓を扱い，「A社制の平ゴムとB社制の平ゴムがある．自分で切って最初の長さを決めて，それがどのくらい伸びるか調べてみた．最初の長さに対して伸ばした後の長さを見ると，よく伸びるのはどちらのゴムですか」と問えば，「A社製平ゴム100×2=200cmで2倍」「B社製平ゴム100×3=300cmで3倍」となるので，B社製平ゴムがよく伸びることがわかる．さらに，図11のようなテープ＋倍比率数直線の図をかくことによって「伸びやすさ」ということが直観的に理解できる．

以上をまとめると，4学年の単元「簡単な割合」では，「離散量の大小比較の問題」からはじめて「連続量の大小比較の問題」を行う．さらに，それらの過程で「差の見方でも倍の見方でも解決できる問題」から「差の見方では解決できない問題」を扱うことで「差の見方」から「倍の見方」に切り替える．最終段階では連続量なので，それと対応した図をかいて「倍の見方」を直観的に理解させる．

差の見方でも倍の見方でも解決できる問題㋐

	もとの値段(円)	値上げした値段(円)
A店のトマト1個	100円	200円
A店のミニトマト1個	100円	300円

差の見方では解決できない問題㋑

	もとの値段(円)	値上げした値段(円)
A店のトマト1個	100円	200円
B店のトマト1個	50円	150円

図9　トマトの値段の値上げの大小比較の問題

差の見方でも倍の見方でも解決できる問題㋒

	最初の長さ(cm)	伸ばした後の長さ(cm)
A 社製平ゴム①	100cm	200cm
A 社製平ゴム②	100cm	300cm

差の見方で解決できない問題㋓

	最初の長さ(cm)	伸ばした後の長さ(cm)
A 社製平ゴム	100cm	200cm
B 社製平ゴム	50cm	150cm

図 10　平ゴムの伸び方の大小比較の問題

図 11　倍比率型乗法構造の数直線(テープ図＋倍比率数直線)

②5 学年単元「割合」での認識 GAP および解消の手立て

割合の意味理解には割合の定義の理解の仕方が重要である．割合の定義はどのように文章表現されているのか，どのように図表現されているかを調べる必要がある．算数の各教科書[7)8)9)10)11)12)]の記述や図を見ると，割合の定義は 2 つの文章表現(下記 A・B)と 3 つの図表現(関係図，倍比率数直線，2 次元表)がある(図 13 参照).

A：比べられる量が，もとにする量の何倍かにあたるかを表す数…3 社教出・啓林館・日文

B：もとにする量を 1 とみたとき，比べる量(比べられる量)がどれだけにあたるかを表した数…3 社大日本・学図・東書

こどもは，割合の定義を学習するまで，「倍の見方」「公倍数をそろえる見方」「単位量あたりの見方」を使って 2 量の大小比較をしてきている．すると，なぜ「割合」ということが定義され，それを「比べられる量÷もとにする量」のような式で求めることが理解できないのである.整理すると図 12 のように既習の見方と割合の定義(文章表現)と割合の図表現と割合を求める式の間に認識 GAP が存在する．

図 12　GAP3・4(図 7・8)にかかわる単元内認識 GAP

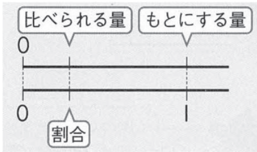
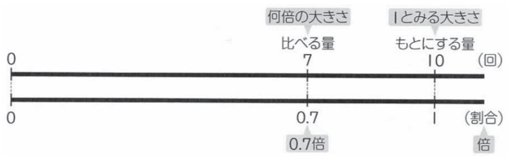
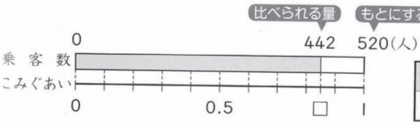
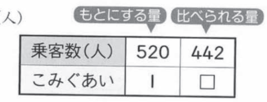
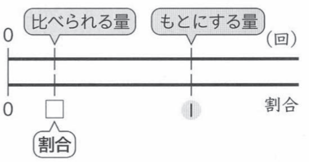
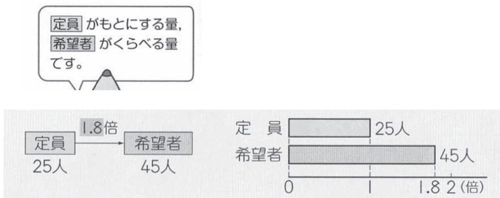
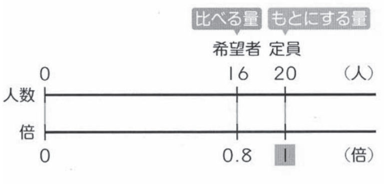
	定義の文表現と 割合を求める式	割合の定義の図表現
教育出版	比べられる量が，もとにする量の何倍かにあたるかを表す数 割合＝比べられる量÷もとにする量	 倍比率数直線
大日本図書	もとにする量を 1 とみたとき，比べる量がどれだけにあたるかを表した数 割合＝比べる量÷もとにする量	 倍比率数直線
学校図書	もとにする量を 1 として，比べられる量がいくつにあたるかを表した数 割合＝比べられる量÷もとにする量	  テープ＋倍比率数直線　2 次元表
東京書籍	もとにする量を 1 とみたとき，比べられる量がどれだけにあたるかを表した数 割合＝比べられる量÷もとにする量	 倍比率数直線
啓林館	ある量をもとにして，くらべる量がもとにする量の何倍にあたるかを表した数 割合＝くらべる量÷もとにする量	 関係図　テープ＋倍比率数直線
日本文教出版	比べる量がもとにする量の何倍にあたるかを表した数 割合＝くらべる量÷もとにする量	 倍比率数直線

図 13　割合の定義とその定義を表す図表現

このようにこどもの認識 GAP を捉えるとAの定義に関係図が整合し，Bの定義に倍比率数直線・2 次元表が整合する(図 14 参照)．また，Aを「静的な定義」，Bを「動的な定義」ということにする．AとBをどのように扱うかが指導上の重要である．

関係図

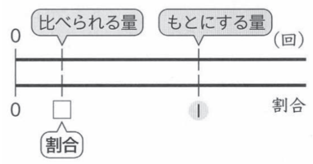
○倍(割合)

もとにする量 → 比べられる量

A：比べられる量が，もとにする量の何倍かにあたるかを表す数

(静的な定義)

倍比率数直線



2 次元表

B：もとにする量を 1 とみたとき，比べる量がどれだけにあたるかを表した数

(動的な定義)

図 14　割合の定義と整合する図表現

単元の導入では，単元間の認識 GAP4(図 7)・認識 GAP3(図 8)の解消が必要になる．4 学年単元「簡単な割合」では，割合が整数倍であり，離散量かつ連続量の大小比較の問題を扱うことにした(図 9・10 参照)．そのため，5 学年単元「割合」では割合が小数倍(P<1・P>1)であり，離散量かつ連続量の大小比較の問題を扱うことにする．

	小数倍(P＜1)	小数倍(P＞1)
離散量	M_{11}	M_{12}
連続量	M_{21}	M_{22}

図 15　5 学年「割合」で扱う大小比較の問題の種類

教材構成は $M_{11} \rightarrow M_{12}$ と大小比較問題(図 16 参照)を行い既習の見方を使って解決させる．授業のまとめとして解決方法の原理である「倍の見方」を「割合」として定義(A)し，定義Aに整合する関係図を提示する．

M_{11}

	投げた回数	入った回数
1 班	20	16
2 班	15	9

投げた回数に対して入った回数を調べたとき，

どの班のシュートが入りやすいですか．

M_{12}

	定員(人)	希望者(人)
ソフトボール	20	40
サッカー	25	45

定員に対して希望者を調べたとき，

希望者が多いのはどの部ですか

図 16　定義 A に合う大小比較の問題

終末場面では，関係図を用いて 3 用法の問題を行う．問題の文脈に合わせて「もとにする量×割合＝比べられる量」という式を立式することが第一である．その後，割合を求める問題は逆算で「割合＝比べられる量÷もとにする量」と変形したり，もとにする量を求める問題は逆算で「もとにする量＝比べられる量÷割合」と変形したりして求めさせる．割合の 3 用法の公式が先行する学習にしないことである．

2 時間目は，$M_{21} \rightarrow M_{22}$ と 2 量の大小比較問題(図 17 参照)を行い定義Ａを用いて解決した後定義を定義Ｂと捉え直しを図る．また整合する倍比率数直線図を提示する．

M_{21}・M_{22}

	実際記録(cm)	目標記録(cm)
7 月 1 日	240	300
7 月 5 日	270	
7 月 20 日	330	
7 月 30 日(大会)	360	

大会に向けて走り幅跳びの練習をしてきた。目標に対する実際の記録を調べたとき，4 日間の記録の伸び方の割合を調べてみましょう．

図 17　定義 B に合う大小比較の問題

定義Ａに基づいて割合を求めると，それぞれ 0.8，0.9，1.1，1.2 となる．それらを，倍比率数直線上に表すことで，目標記録(300cm)が「基にする量」という意味に加えて固定する量「1」という意味，実際の記録が「割合」という意味に加えて変動する量Ｐという意味が理解される．よって，割合の定義がＡからＢに変更され，倍比率数直線が図表現としてふさわしいことから整合的に理解されるのである．

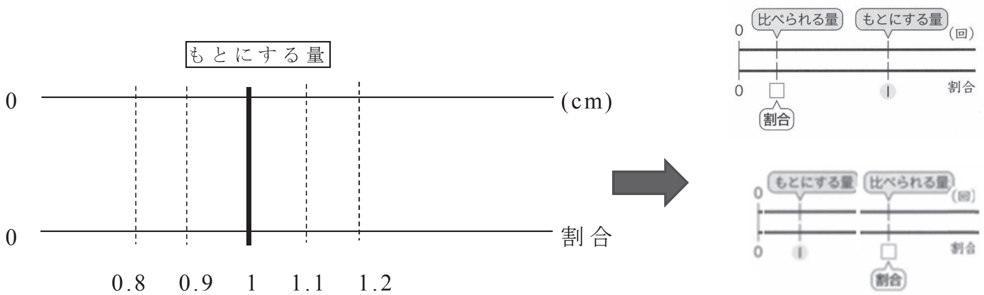


図 18　定義Ａから定義Ｂへの変更

終末場面では，定義Ｂを「動的な定義」として用いて 3 用法の問題を再度解決する．定義Ｂに基づくと，割合が 1 以上か 1 以下は意識すること，さらに 1 を基点として比べられる量の方向で「もとにする量×割合＝比べられる量」を立式する．その上で，割合ともとにする量を求める．例えば「200 人のうち 80 人が小学生でした．小学生は全体の何％ですか．」の場合，図 19 のように図表現される．このとき比べられる量が 200 の半分の 100 のとき割合が 0.5，その半分 50 のとき割合が 0.25 というように考えると 80 の場合は 0.25 と 0.5 の間にあることの見通しがたつ．その上で，200×□＝80 から逆算で求めたり，200 を 100 にすると 80 は 40 なので，1 だったら 0.4 とい

う「倍の見方」も使ったりして，割合の意味を考えて解決させる．

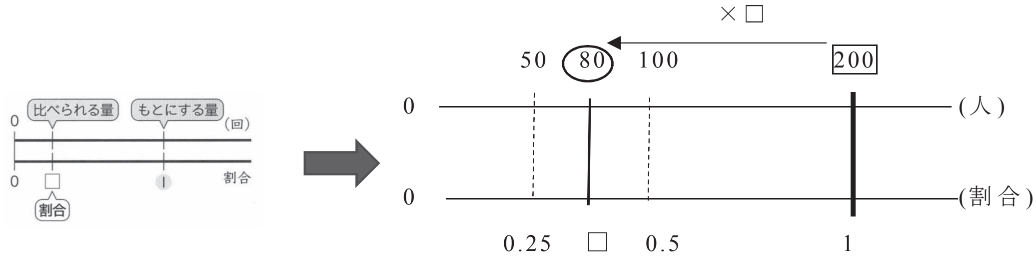


図 19　定義Bを用いた解法「割合を求める場合」

さらに「8 人は全体の 25%のとき，全体の人数は何人ですか．」の場合，図 20 のように図表現される．このとき，8÷0.25 と形式的だけでなく，比べられる量の割合が 0.25 なのだから 4 倍すれば 1 になるという見方を使って解決してもよい．

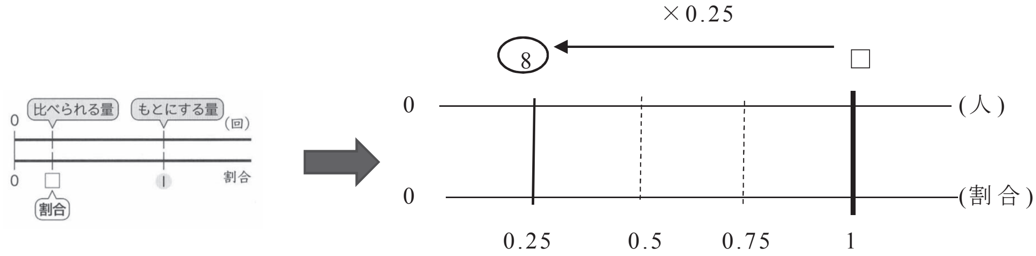


図 20　定義Bを用いた解法「もとにする量を求める場合」

単元の最終段階として「濃度 30%の食塩水 100g に何 g の水を足したら濃度が 10%の食塩水になるか」という問題を行う．方程式を使えば足す水の量を x(g)として，30/(100+x)=0.1 となるので，解き x=200(g)となる．しかし，定義Bを用いて解決する．そのためには，倍比率数直線でもとになる量を変化させるという発想が必要である．普通定義Bはもとにする量を 1 と見ているため固定されているが，そのもとにする量を変化させ比べられる量の方を固定すると考えるとよい．もとになる量が変化するので割合が変わるのである．割合が小さくなるというのは，もとになる量と比べられる量の位置が遠くなるとイメージする．濃度 30%の食塩水 100g には 30g の食塩が入っているので，10%にするにはもともとある 30g の食塩に対して 300g の食塩水を用意すればよい．よって，300-100=200g の水を足せばよいということになる．

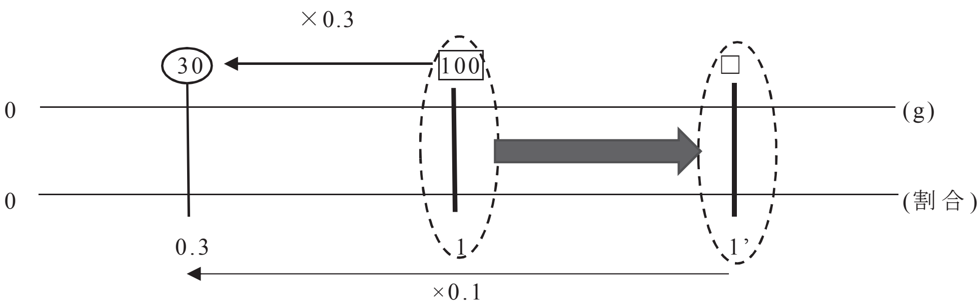


図 20　定義Bを用いた解法「食塩水の濃度問題」

３．まとめ

5 学年の単元「割合」で割合の意味理解を促すには，次の 3 つの段階を想定して支援を行うことである．①2 量の関係した状態について大小比較ができ，割合の意味(定義Ａ)を理解する．定義Ａに基づいて式を変形して割合・比べられる量・もとにする量を求めることができる段階，②割合の意味を定義Ａから定義Ｂに捉え直して，割合の意味(定義Ｂ)を理解する．割合の意味を考えながら割合・比べられる量・もとにする量を求める問題を適切に解決できる段階，③食塩水の濃度や買い物の割増し・割引き問題においても，割合の意味(定義 A・定義 B)を見直しながら問題に合うように解決することができる段階である．

このことは，認知心理学の用語で言い換えると次のようになる[13)]．割合の定義についての知識を宣言的知識，割合の 3 用法についての知識を手続き的知識とする．このとき，①’宣言的知識がどのように獲得形成されているのか，②’宣言的知識に基づいて整合的に手続き的知識が獲得され実行されているのか，③’手続き的知識による宣言的知識の見直しがどのように図られているのかである．この意味からは，割合の定義Ｂは割合の 3 用法の公式を適切に使うための宣言的知識であり本稿では仮に「動的な定義」とした．「動的な定義」である割合の定義Ｂの獲得のための支援の在り方が最も重要である．

【引用文献・参考文献】

1) 藤村宣之(1995)，『認知心理学からみた数の理解(吉田・多鹿編著)　6 章．割合概念』，北大路書房，pp121-141
2) 中村享史(2002)，『割合指導に関する研究の動向と今後の方向』，日本数学教育学会誌，第 84 巻 8 号，pp 14-21
3)国立教育政策研究所，全国学力・学習状況調査報告書[小学校／算数](H20・H21・H24・H25・H30)
4)金子忠雄ゼミナール(1990)，数学教育における数学的問題解決の在り方，新潟大学教育学部数学教室，数学教育研究第 26 号，pp21-27
5)田端輝彦(2002)，『同種の量の割合と異種の量の割合の指導順序に関する考察』，日本数学教育学会誌，第 84 巻第 8 号，pp22 −29
6)小学校学習指導要領算数科解説編(2016)，文部科学省，pp213-215
7)藤井斉亮・飯高茂ほか（2010），『新しい算数 5 下』，東京書籍，pp54-57
8)橋本吉彦ほか（2010），『たのしい算数 5 年』，大日本図書，pp138-141
9)一松信ほか（2010），『みんなと学ぶ小学校算数 5 年』，学校図書，pp225-229
10)小山正孝・中原忠男ほか（2010），『小学算数 5 年』，日本文教出版，pp58-61
11)澤田利夫ほか（2010），『小学算数 5 年』，教育出版，pp150-153
12)清水静海・船越俊介ほか（2010），『わくわく算数 5 年 』，啓林館，pp168-171
13)佐伯胖(1998)，認知科学から見た学校数学，『学校数学の授業構成を問い直す』，日本数学教育学会，pp81-82